



---

# Procesos Multivariables

Prof. Cesar de Prada

ISA-UVA

[prada@autom.uva.es](mailto:prada@autom.uva.es)



# Outline

---

- ✓ Interacción
- ✓ Control de procesos multivariables usando lazos de control simples
- ✓ RGA
- ✓ Emparejamiento de lazos
- ✓ Control por desacoplo

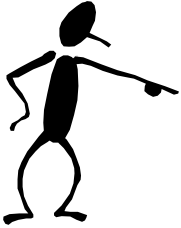


# Interacción

Un ejemplo

## Estos coches

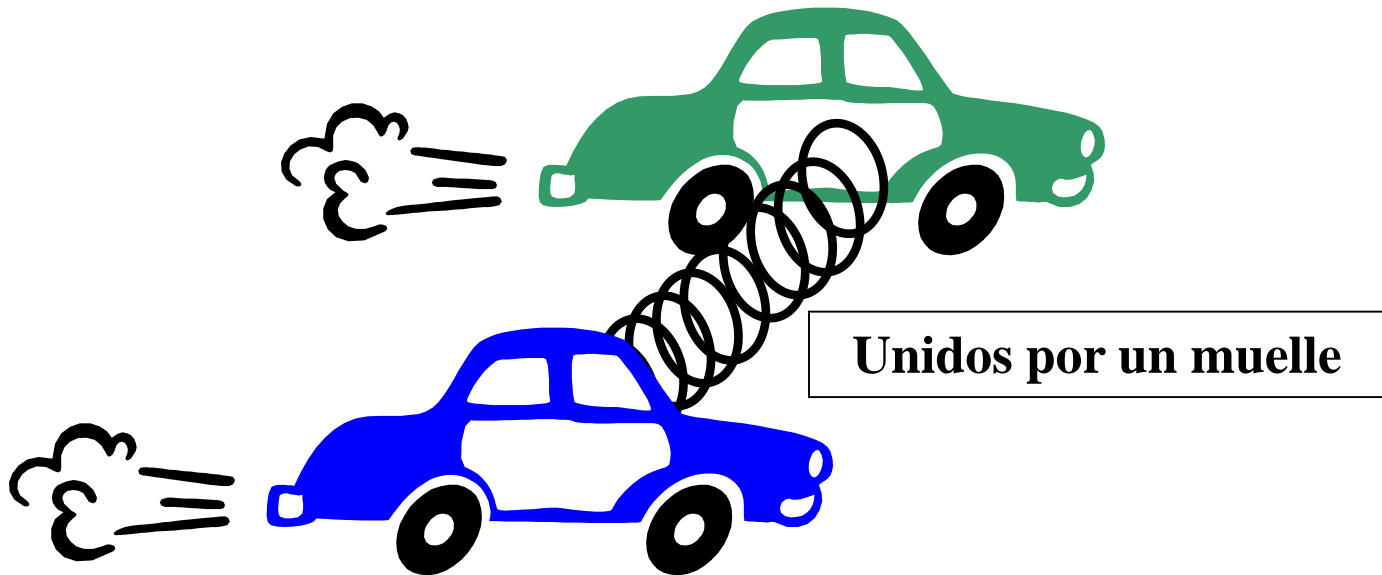
- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?



# Interacción

## Estos coches

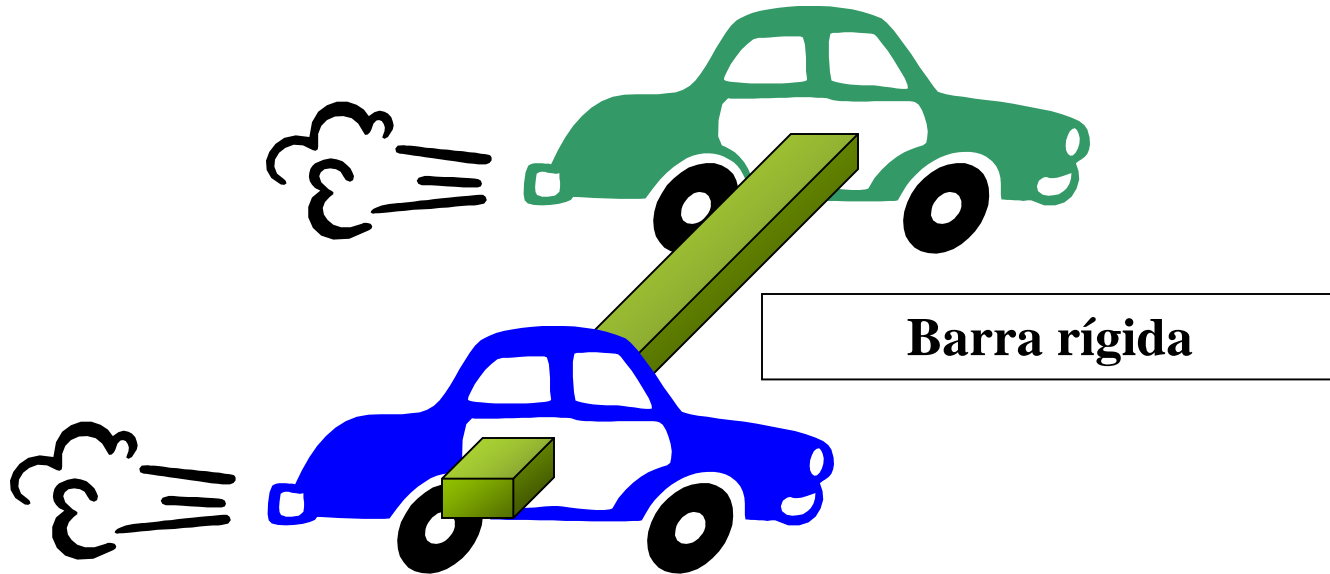
- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?



# Interacción

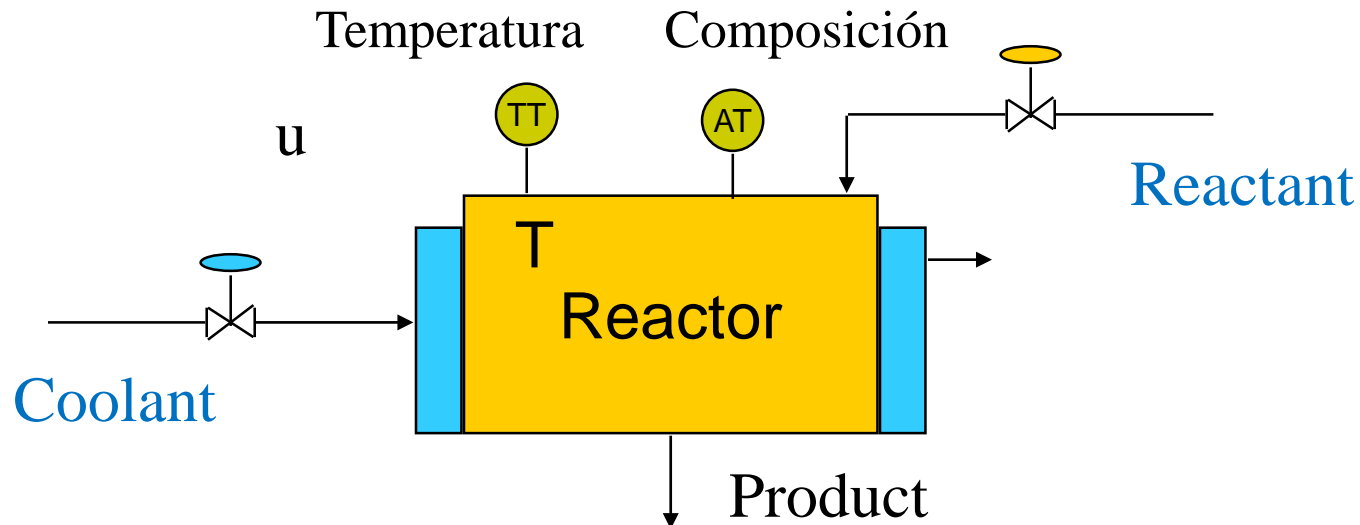
## Estos coches

- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?





# Reactor

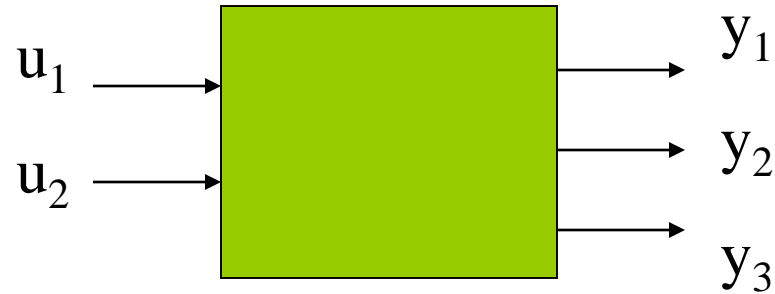


Interacción entrada / salida entre las variables

Interacción en lazo abierto / No necesariamente igual a la interacción en lazo cerrado



# Sistemas MIMO (Multi Input Multi Output)



$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Interacción

Direcciones de ganancia

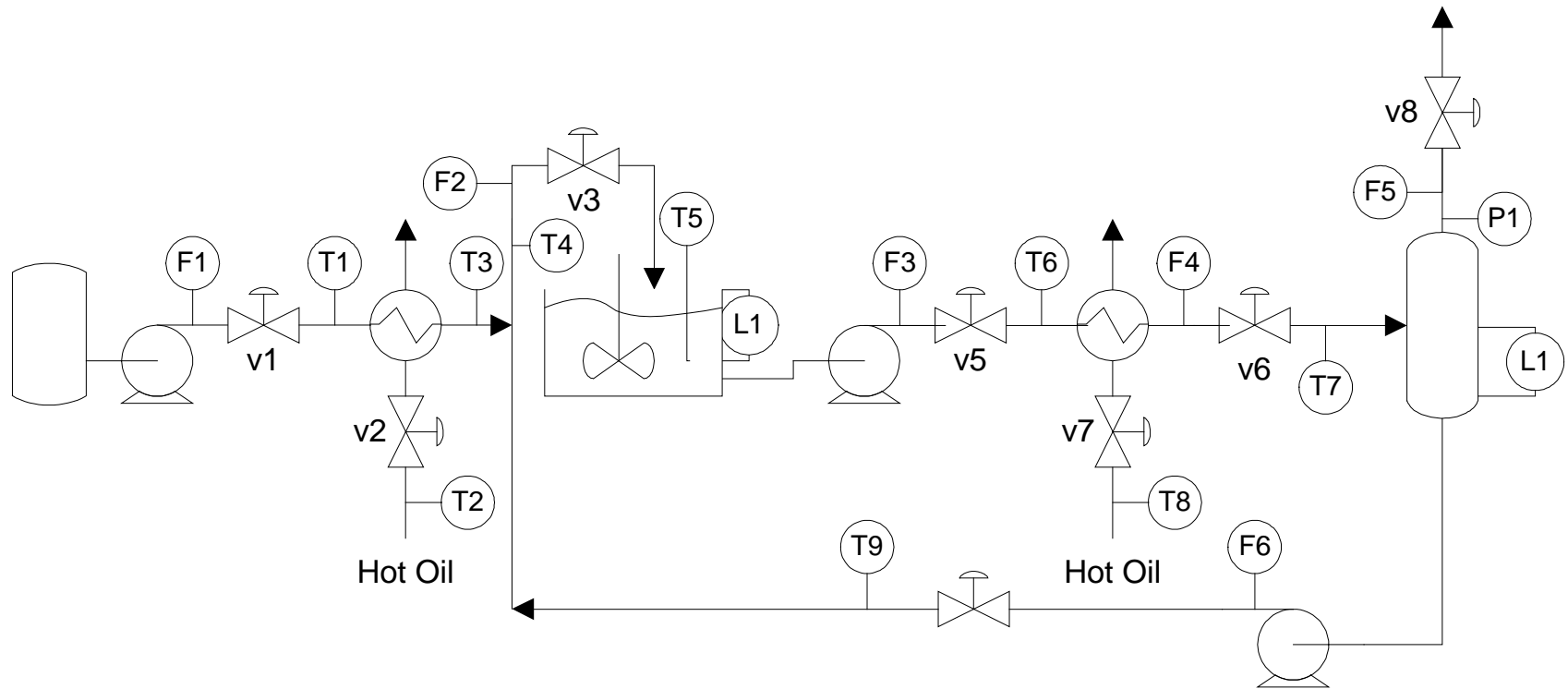


# Grados de libertad



¿Como determinar el número de variables que se pueden controlar sin error en un proceso?

¿Como formar lazos de control?



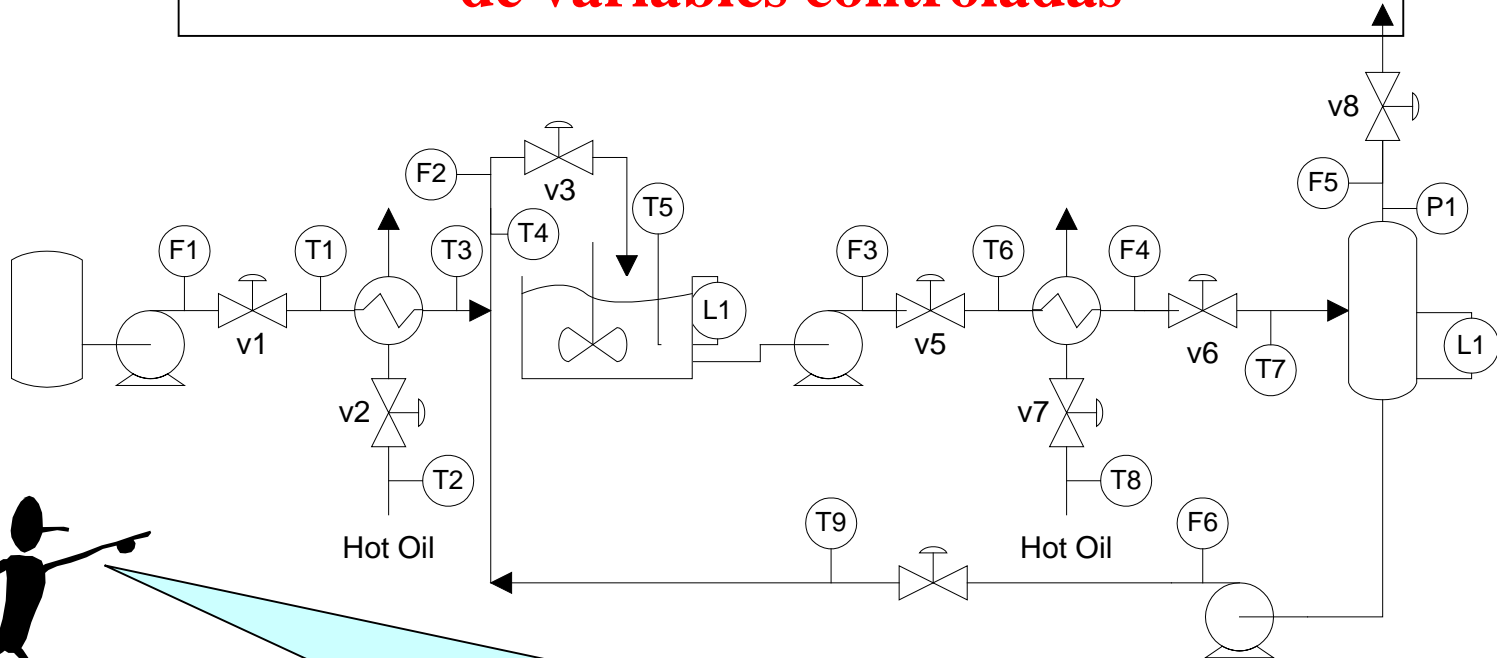




# Grados de libertad

Un requisito básico :

**Número de válvulas (actuadores)  $\geq$  número de variables controladas**



**Esta es una condición necesaria para satisfacer los objetivos de control, pero no suficiente!**



## CONTROLABILIDAD

**Se dice que un proceso es controlable, si las variables controladas pueden mantenerse en estado estacionario en sus valores de consigna, a pesar de las perturbaciones que puedan afectar al proceso.**

Modelo de un proceso 2x2

$$\begin{bmatrix} CV_1 \\ CV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MV_1 \\ MV_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d1} \\ K_{d2} \end{bmatrix} D$$

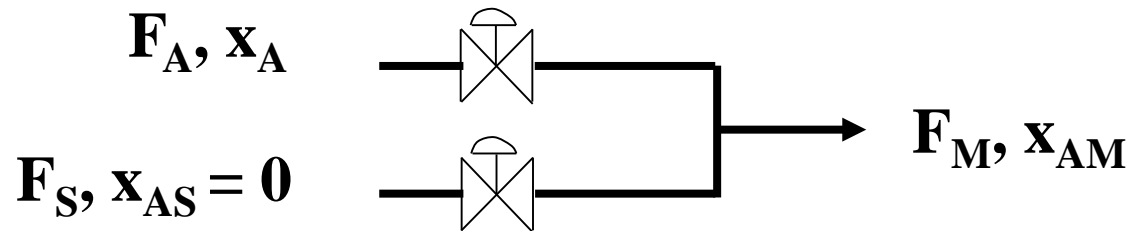
**Matemáticamente, un proceso es controlable si la matriz de ganancia del mismo puede invertirse, esto es, si su determinante  $K \neq 0$ .**



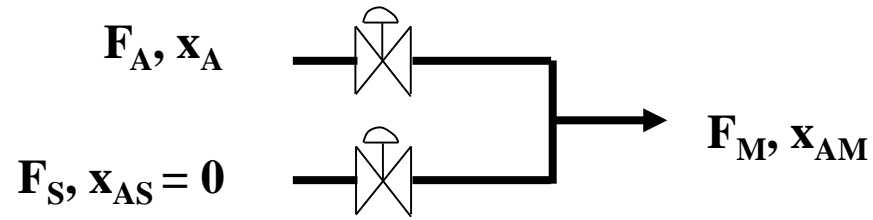
# Controlabilidad

## En el proceso de mezclado

- Son controlables de forma independiente  $F_M, x_{AM}$ ?
- Existe interacción en el proceso?



$$F_M = F_A + F_S \Rightarrow \Delta F_M = \Delta F_A + \Delta F_S$$
$$x_{AM} = \frac{F_A x_A}{F_A + F_S} \Rightarrow \Delta x_{AM} = \left[ \frac{(1 - x_A) F_A}{(F_S + F_A)^2} \right]_{ss} \Delta F_A + \left[ \frac{-F_A x_A}{(F_S + F_A)^2} \right]_{ss} \Delta F_S$$



$$\begin{bmatrix} \Delta F_M \\ \Delta x_{AM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(1-x_A)F_A}{(F_S + F_A)^2} \end{bmatrix}_{ss} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-F_A x_A}{(F_S + F_A)^2} \end{bmatrix}_{ss} \begin{bmatrix} \Delta F_A \\ \Delta F_S \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(K) = \frac{-F_A x_A}{(F_A + F_S)^2} - \frac{F_A (1-x_A)}{(F_A + F_S)^2} = \frac{-F_A}{(F_A + F_S)^2} \neq 0$$

**Sí, este sistema es controlable!**

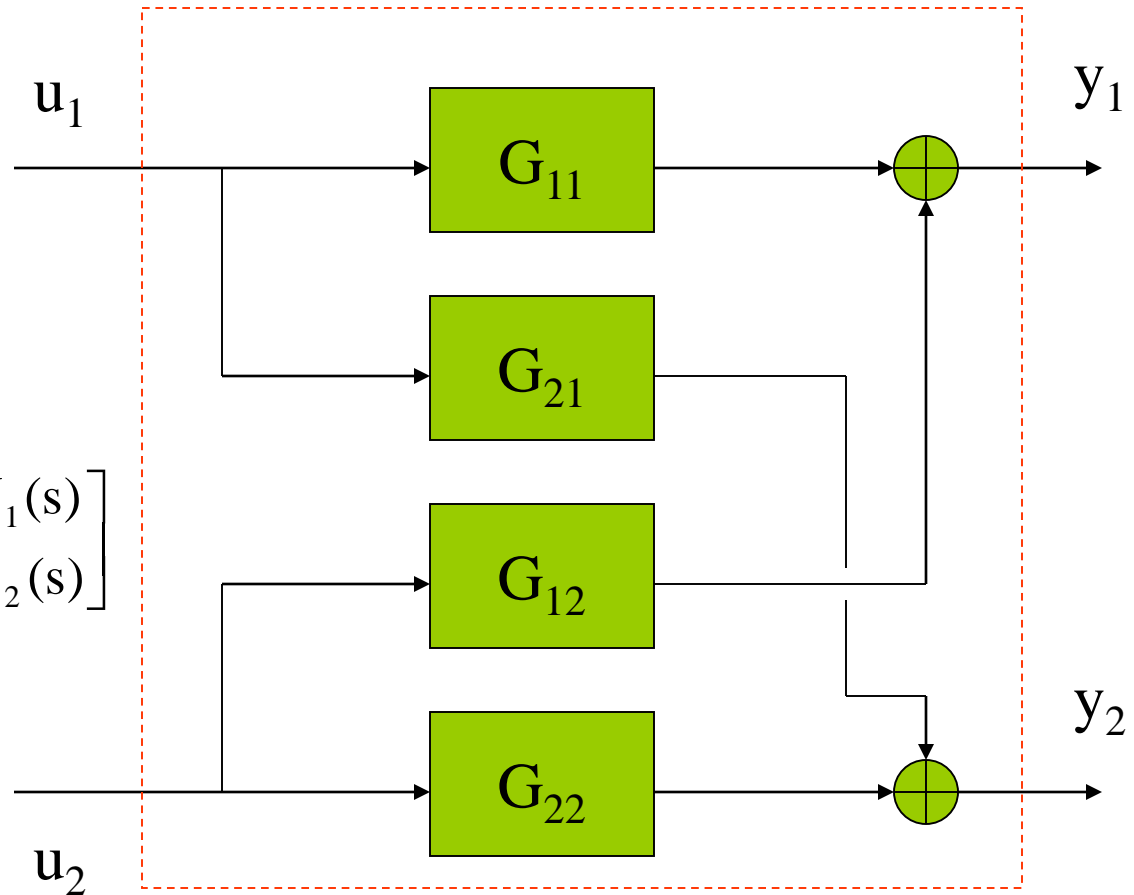
¿Sería controlable el sistema si  $x_{AS}$  es distinto de cero?



# Interacción

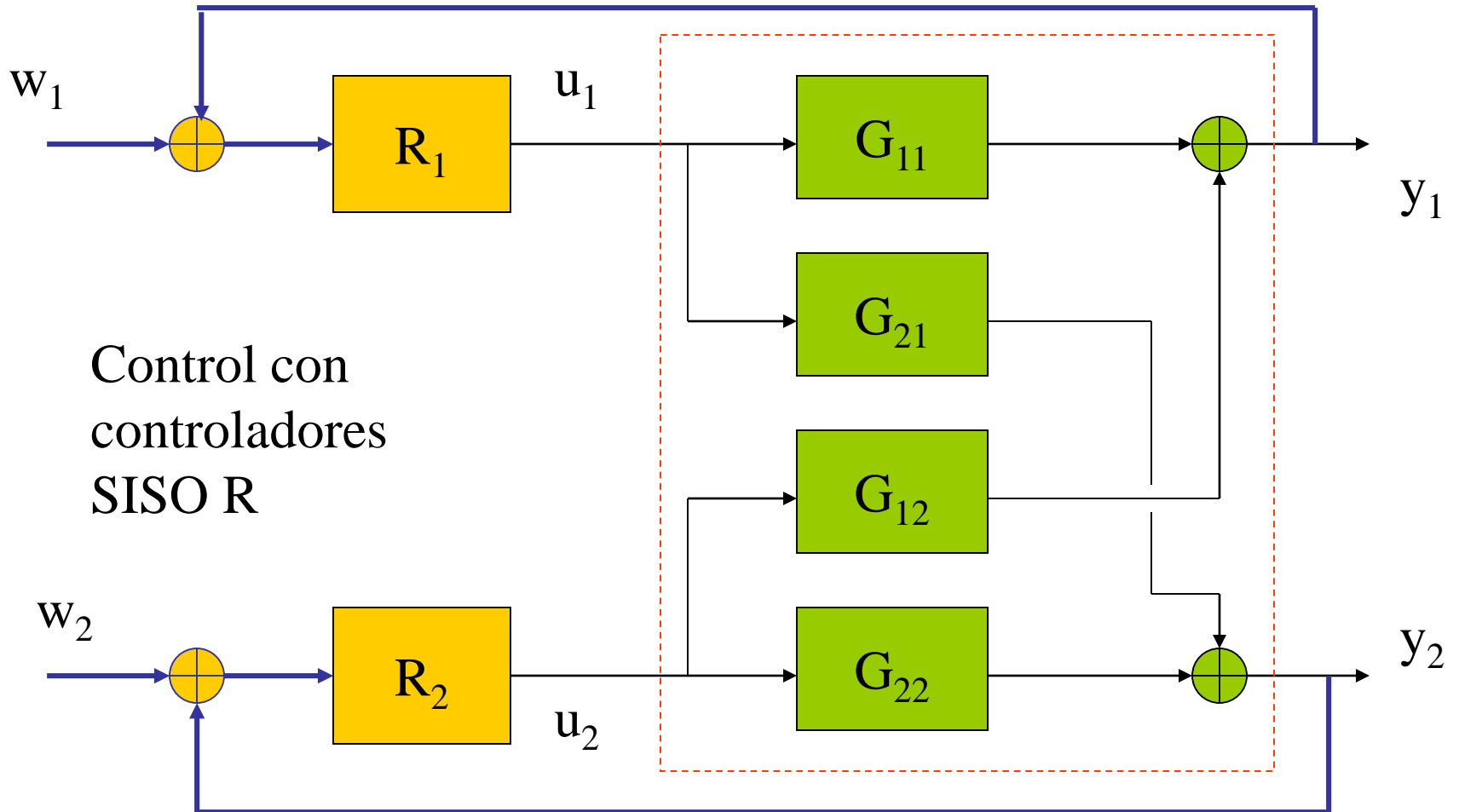
Lazo abierto

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$





# Interacción





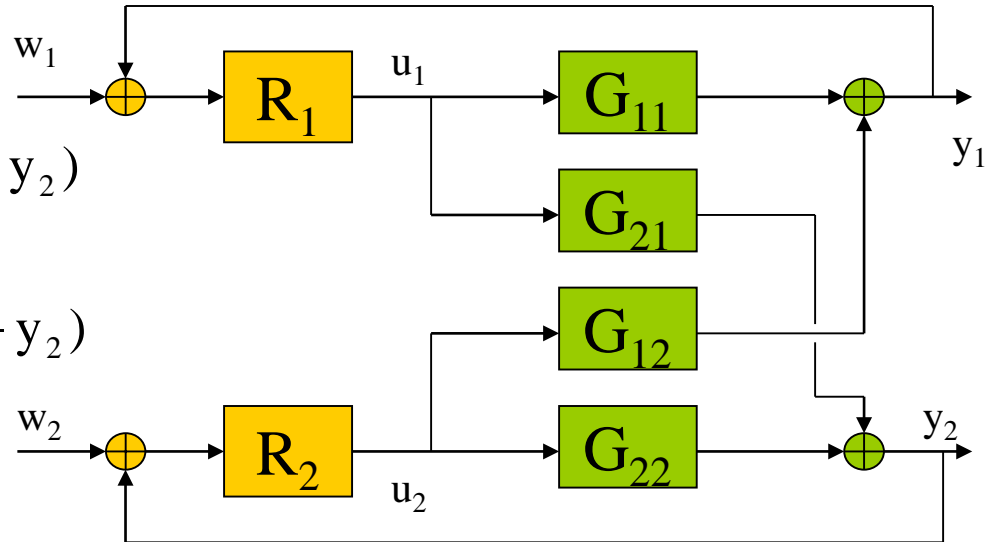
# Lazo cerrado

$$y_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 =$$

$$= G_{11}R_1(w_1 - y_1) + G_{12}R_2(w_2 - y_2)$$

$$y_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 =$$

$$= G_{21}R_1(w_1 - y_1) + G_{22}R_2(w_2 - y_2)$$



$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1 + G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1 + G_{11}R_1} (w_2 - y_2)$$

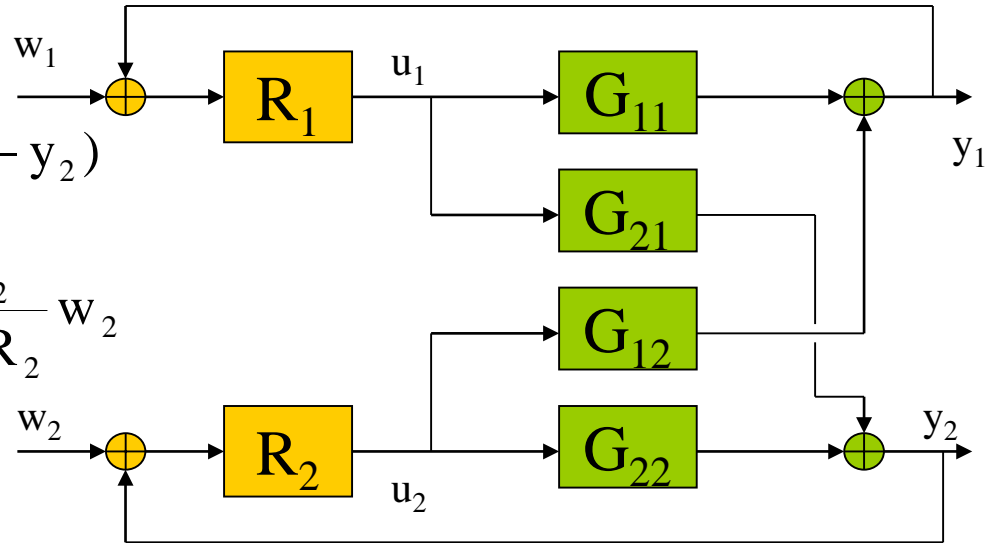
$$y_2 = \frac{G_{21}R_1}{1 + G_{22}R_2} (w_1 - y_1) + \frac{G_{22}R_2}{1 + G_{22}R_2} w_2$$



# Interacción

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1} (w_2 - y_2)$$

$$y_2 = \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2} (w_1 - y_1) + \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2$$



$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1} \left( w_2 - \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2} (w_1 - y_1) - \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2 \right)$$

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_2$$



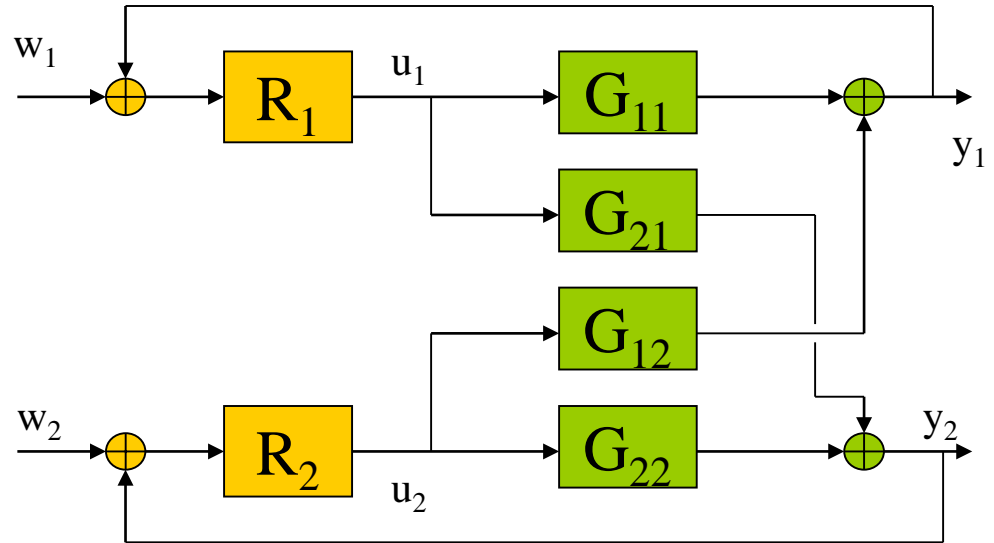


# Interacción (Lazo 1)

$w_1$  y  $w_2$  influyen en  $y_1$

Si  $G_{12}$  ó  $G_{21}$  son = 0 no hay cambio de dinámica sobre un sistema SISO  $u_1 \rightarrow y_1$

Si  $R_2$  pasa a manual se modifica la dinámica del lazo 1

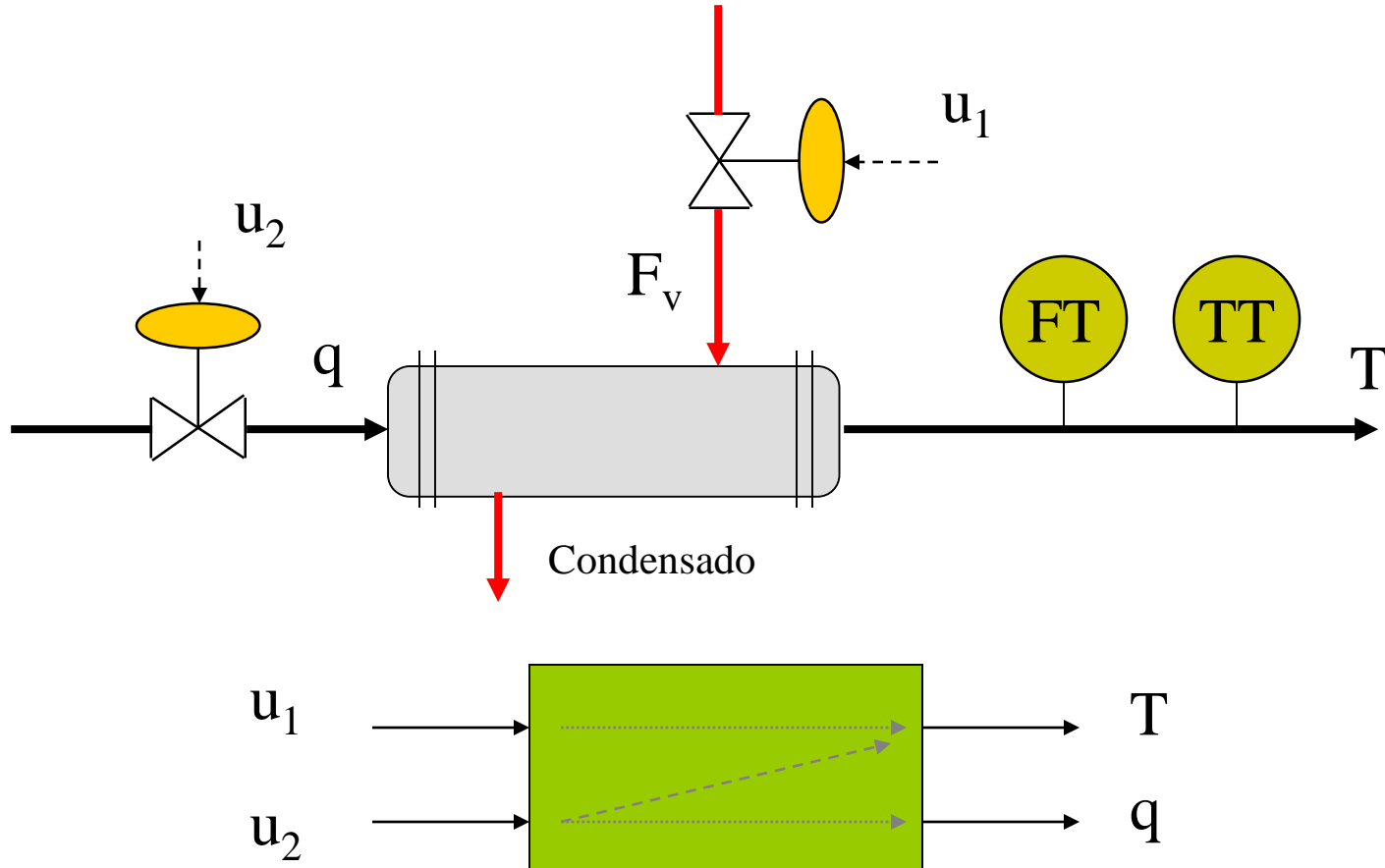


$$y_1 = \frac{G_{11}R_1(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_2$$

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{(1+G_{11}R_1)} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2)} w_2$$

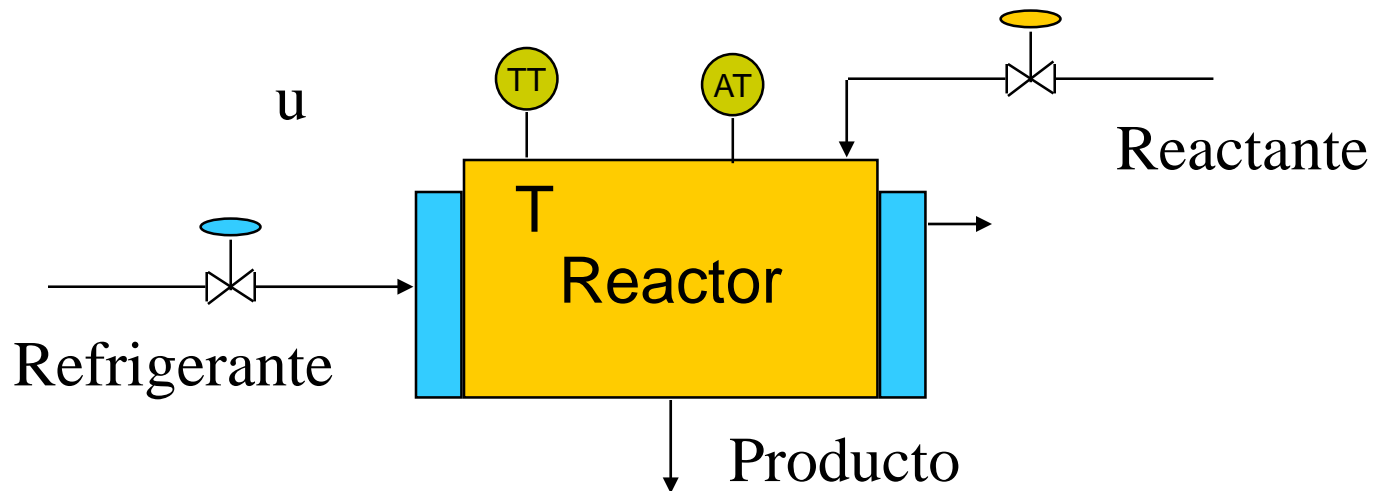
$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{(1+G_{11}R_1)} w_1$$

# Interacción





# Reactor

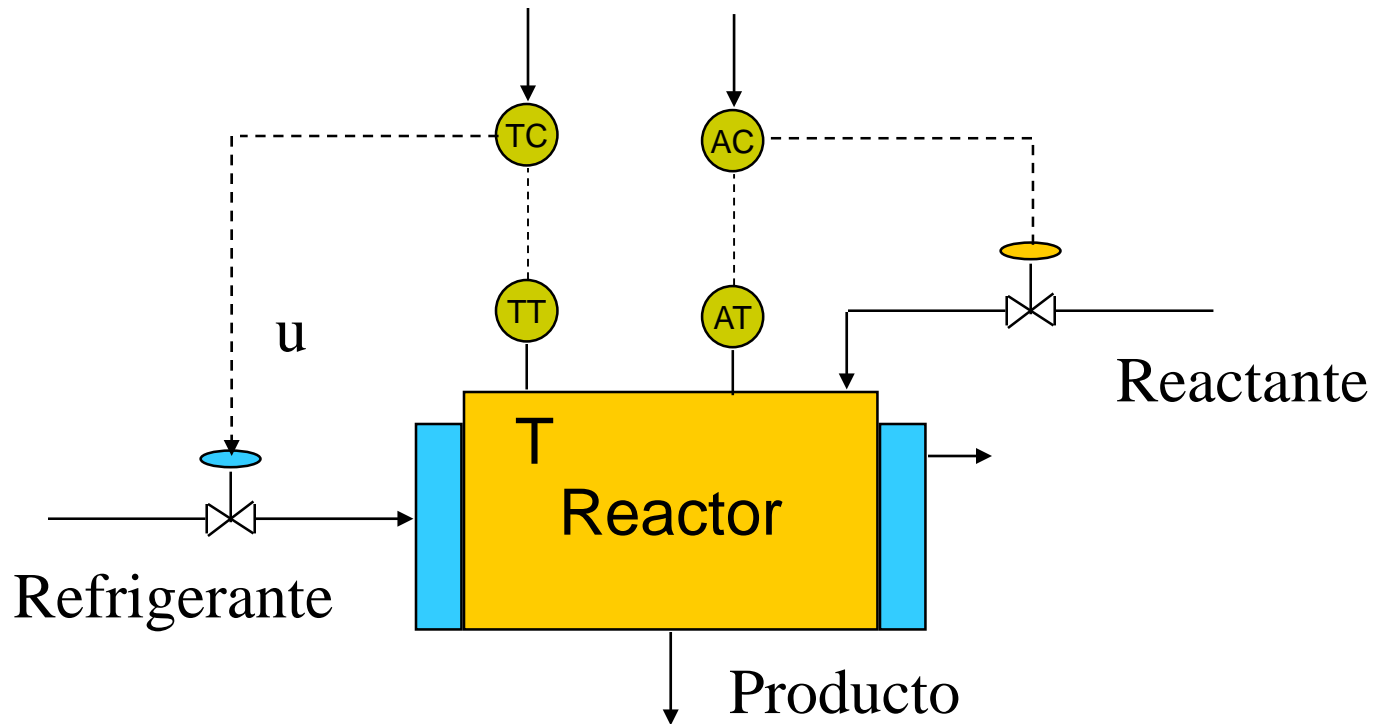


Interacción entrada salida en ambas variables

Interacción en lazo abierto



# Reactor



Interacción entrada salida en ambas variables

Interacción en lazo cerrado



# Interacción

- ✓ Medir el grado de interacción
- ✓ ¿Se puede funcionar con lazos simples?
- ✓ En caso afirmativo, ¿Cual es el mejor emparejamiento de variables entrada-salida?





# Matriz de ganancias estacionarias

---



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

No es una buena medida de interacción:

Depende de las unidades en las que se exprese

No refleja el hecho característico de la interacción multivariable: los cambios en un lazo cuando otros pasan de automático a manual



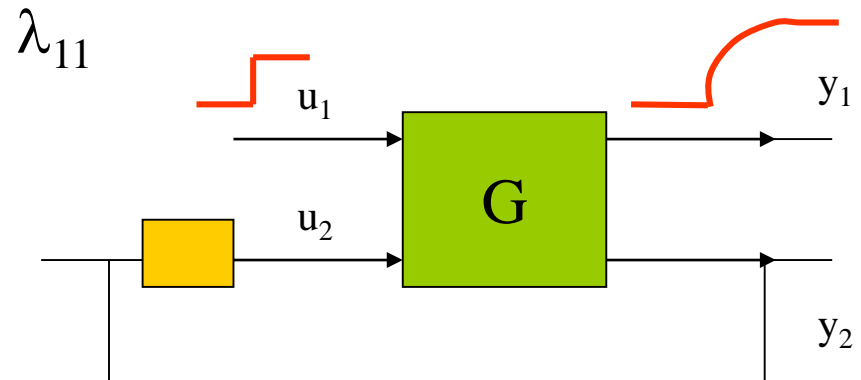
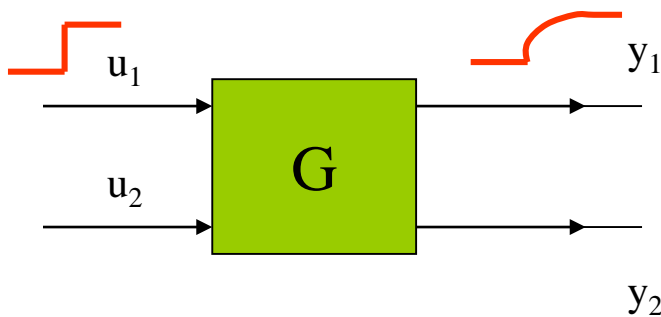
# Matriz de Ganancias Relativas (RGA) Matriz de Bristol



	$u_1$	$u_2$
$y_1$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$y_2$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$

$$\lambda_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_k = \text{cte}; \forall k \neq j}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y_m = \text{cte}; \forall m \neq i}}$$

$\lambda_{11}$  mide el cambio de ganancia entre  $u_1$  e  $y_1$  en los experimentos:






# RGA

Puede emplearse para hacer una adecuada selección de pares entrada-salida para controlar un sistema MIMO escogiendo la mínima interacción en estado estacionario o a una frecuencia dada

$$\lambda_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u=\text{cte}}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y=\text{cte}}}$$

$\lambda_{i,j} = 1$   Deseable

$\lambda_{i,j} = 0$

	$u_1$	$u_2$
$y_1$	0.2	0.8

$\lambda_{i,j} = \infty$

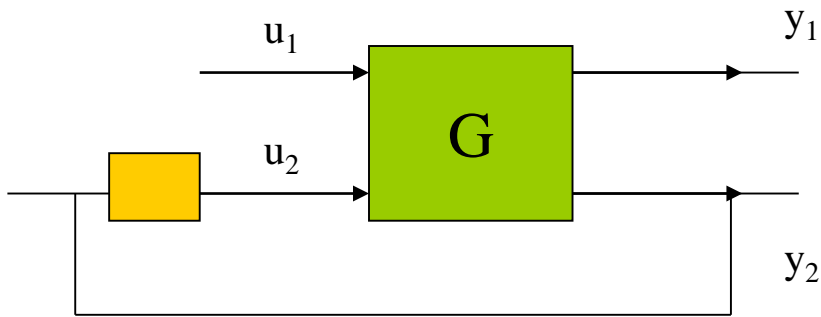
$y_2$	0.8	0.2
-------	-----	-----

$\lambda_{i,j} < 0$   Inestabilidad





# RGA



$$\lambda_{11}$$

$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 + k_{12}\Delta u_2$$

$$\Delta y_2 = 0 = k_{21}\Delta u_1 + k_{22}\Delta u_2$$

$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\Delta u_1$$

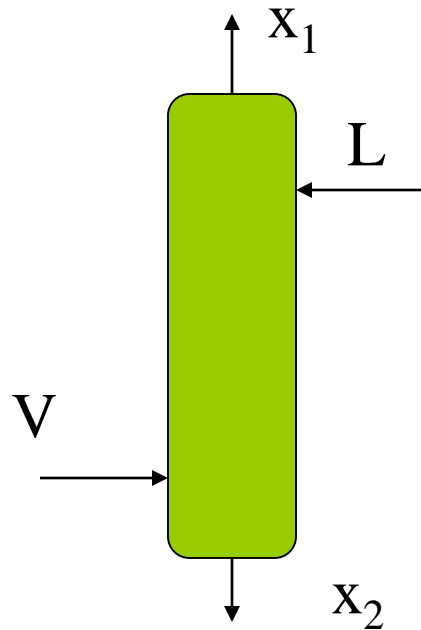
$$\left. \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right|_{y_2=\text{cte}} = \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{k_{22}}$$

$$\lambda_{11} = \frac{k_{11}}{\frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{k_{22}}} = \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$$

	$u_1$	$u_2$
$y_1$	$\frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$	$\frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$
$y_2$	$\frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$	$\frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$



# Columna



$$G(0) = \begin{matrix} & \% & \% \\ \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix} & \% & \% \end{matrix}$$

$$\text{RGA} \quad \begin{matrix} & \text{L} & \text{V} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9,9 & -8,9 \\ -8,9 & 9,9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Muy fuerte interacción con el emparejamiento ( L x<sub>1</sub>) (V x<sub>2</sub>)

Inestabilidad asegurada con el emparejamiento ( L x<sub>2</sub>) (V x<sub>1</sub>)



# RGA

$$\text{RGA}(G) = \Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

La suma de los elementos de una fila o columna de la RGA es 1

Es independiente del escalado de u e y

Para procesos asimétricos, la inversa puede sustituirse por la pseudoinversa

Matlab  $\text{RGA} = G.*\text{pinv}(G)'$



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{pinv}(G) = \begin{bmatrix} 0.46 & -0.35 \\ -0.02 & 0.26 \\ 0.14 & -0.08 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0.91 & -0.05 & 0.14 \\ 0 & 1.04 & -0.04 \end{bmatrix}$$

$y_1$  debe emparejarse con  $u_1$

$y_2$  debe emparejarse con  $u_2$



# RGA

$$G = \begin{bmatrix} 16.8 & 30.5 & 4.3 \\ -16.7 & 31.0 & -1.41 \\ 1.27 & 54.1 & 5.40 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ y_1 \begin{bmatrix} 1.50 & 0.99 & -1.48 \\ -0.41 & 0.97 & 0.45 \\ -0.08 & -0.95 & 2.03 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{RGA}$$

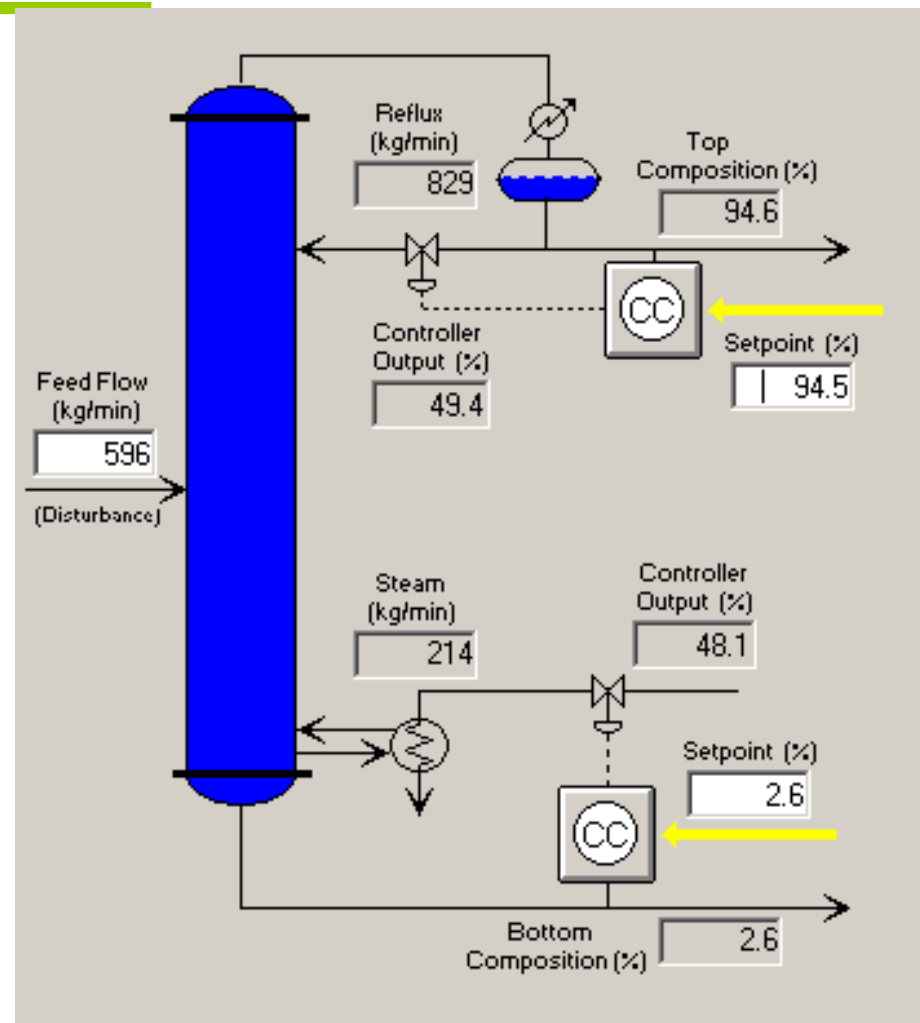
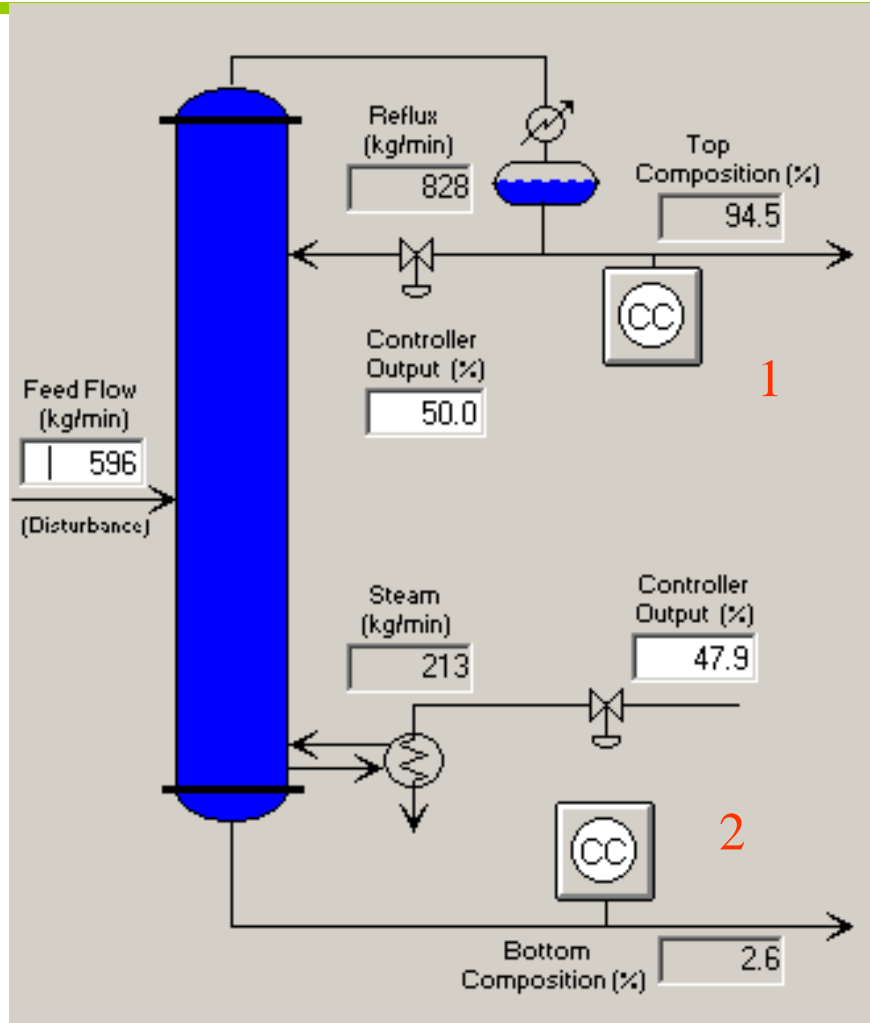
El unico emparejamiento SISO admisible resulta ser:

$$y_1 \text{ ---- } u_1 \quad y_2 \text{ ---- } u_2 \quad y_3 \text{ ---- } u_3$$

con una interacción mayor en el tercer lazo

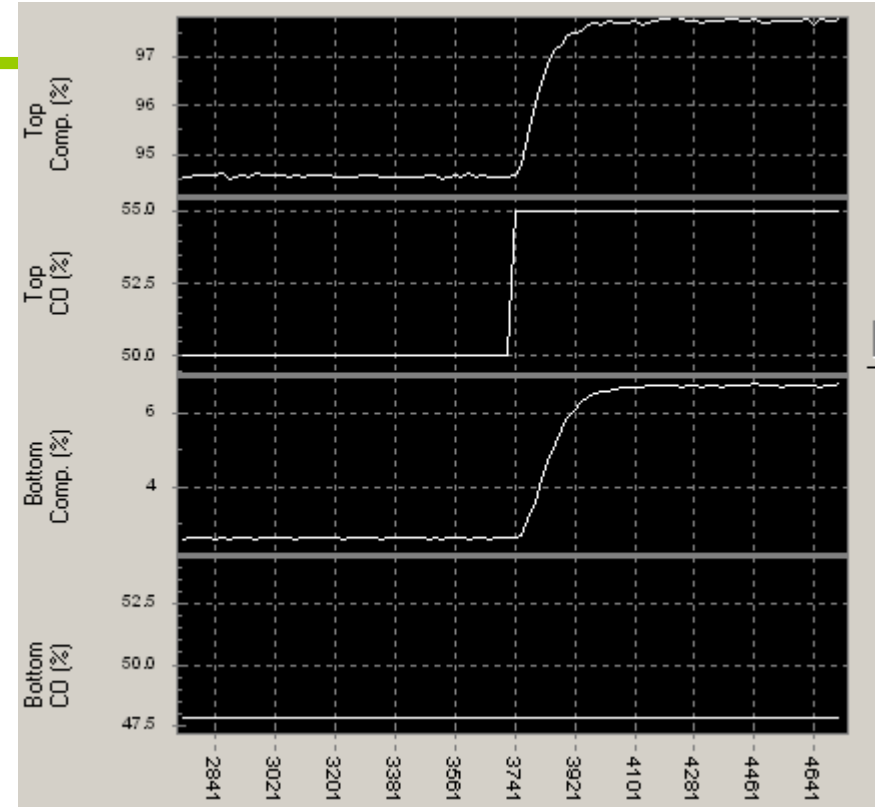
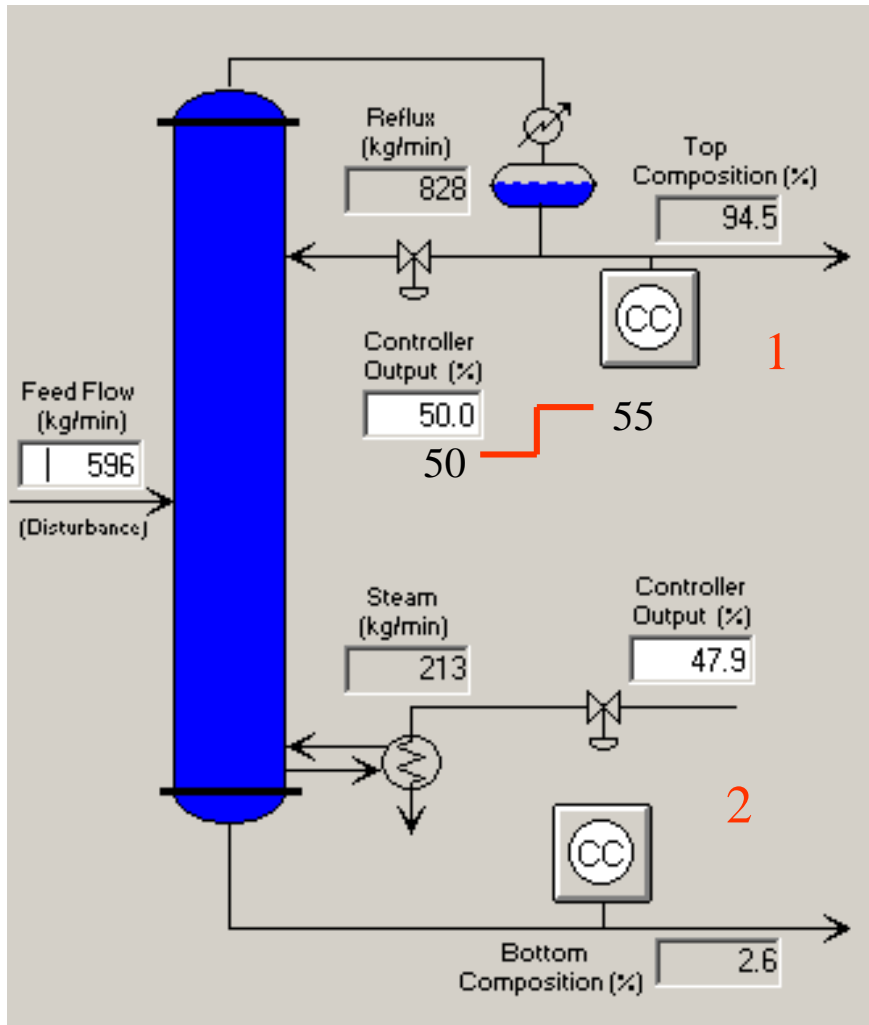


# Columna de destilación





# Experimento en lazo abierto 1

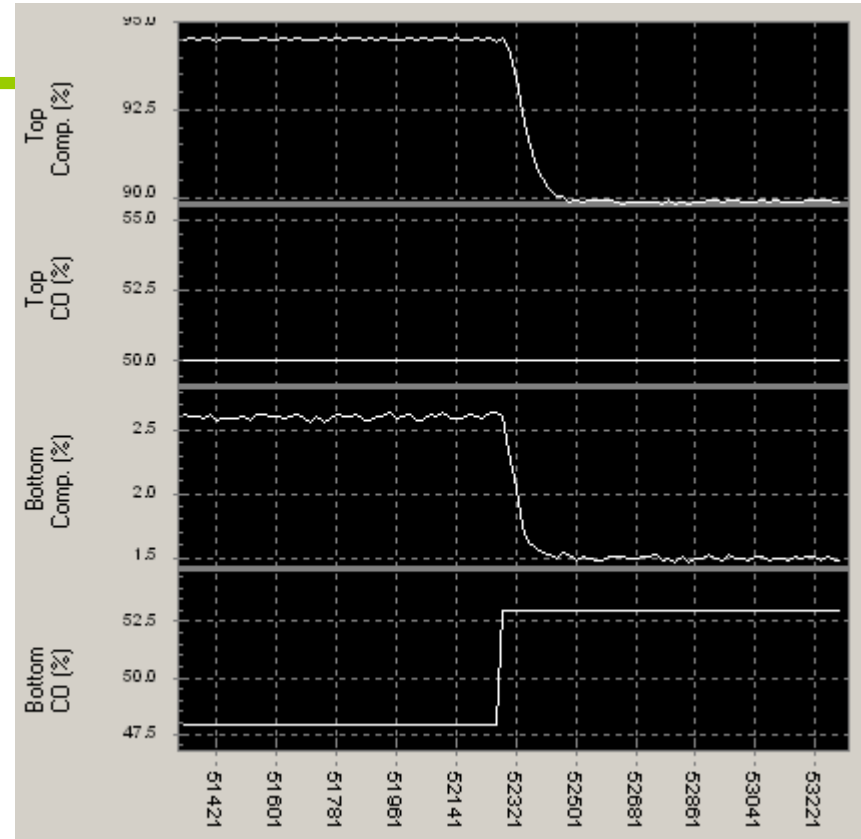
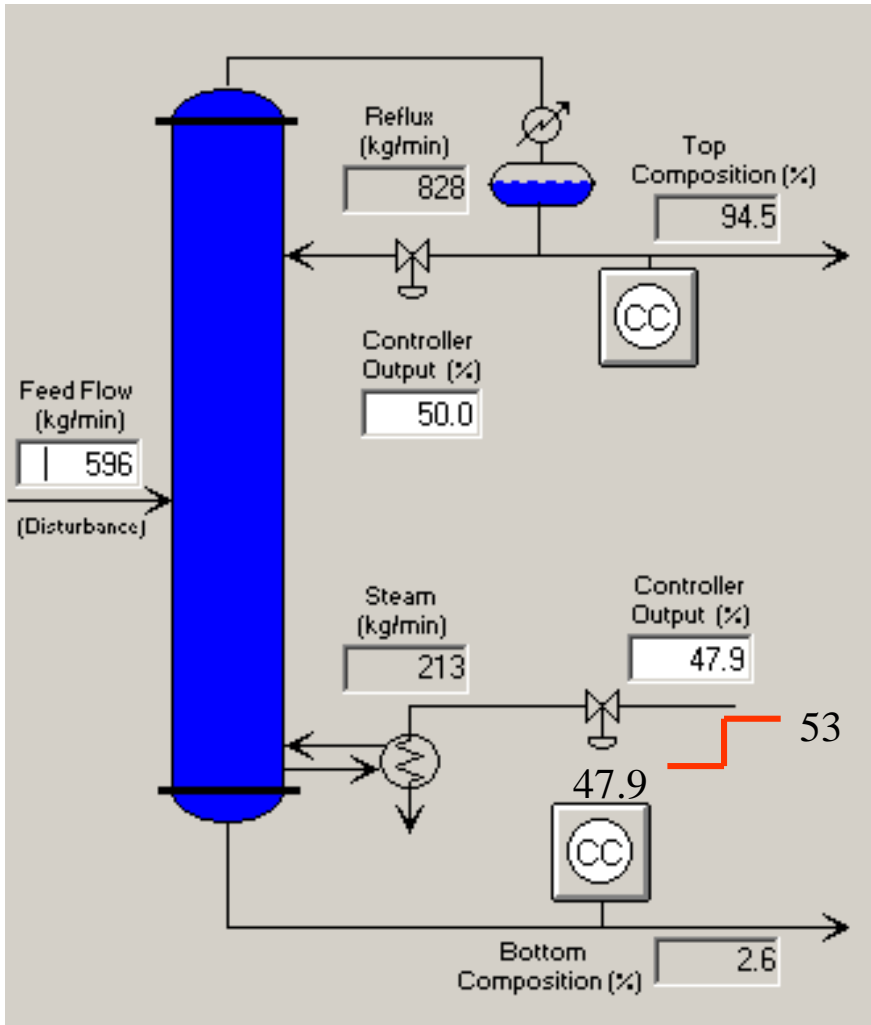


$$G_{11} = \frac{K_{11}e^{-d_{11}s}}{\tau_{11}s + 1} = \frac{0.648e^{-21.7s}}{60s + 1}$$

$$G_{21} = \frac{K_{21}e^{-d_{21}s}}{\tau_{21}s + 1} = \frac{0.815e^{-34.4s}}{84.7s + 1}$$



# Experimento en lazo abierto 2



$$G_{12} = \frac{K_{12}e^{-d_{12}s}}{\tau_{12}s + 1} = \frac{-0.894e^{-21.6s}}{54.3s + 1}$$

$$G_{22} = \frac{K_{22}e^{-d_{22}s}}{\tau_{22}s + 1} = \frac{-0.236e^{-6.61s}}{41.9s + 1}$$

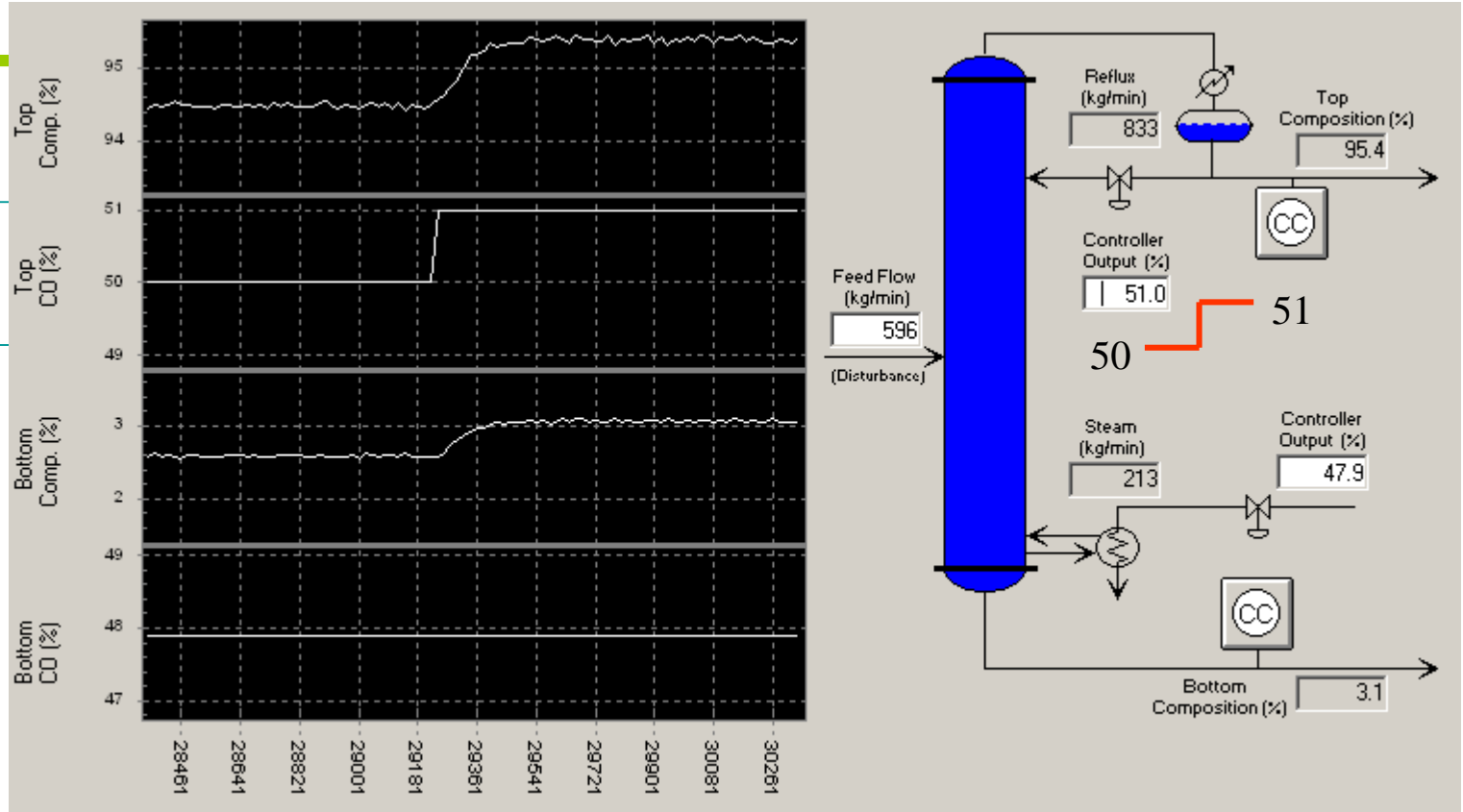




# Cuidado con los experimentos!



Cambio del  
2 %



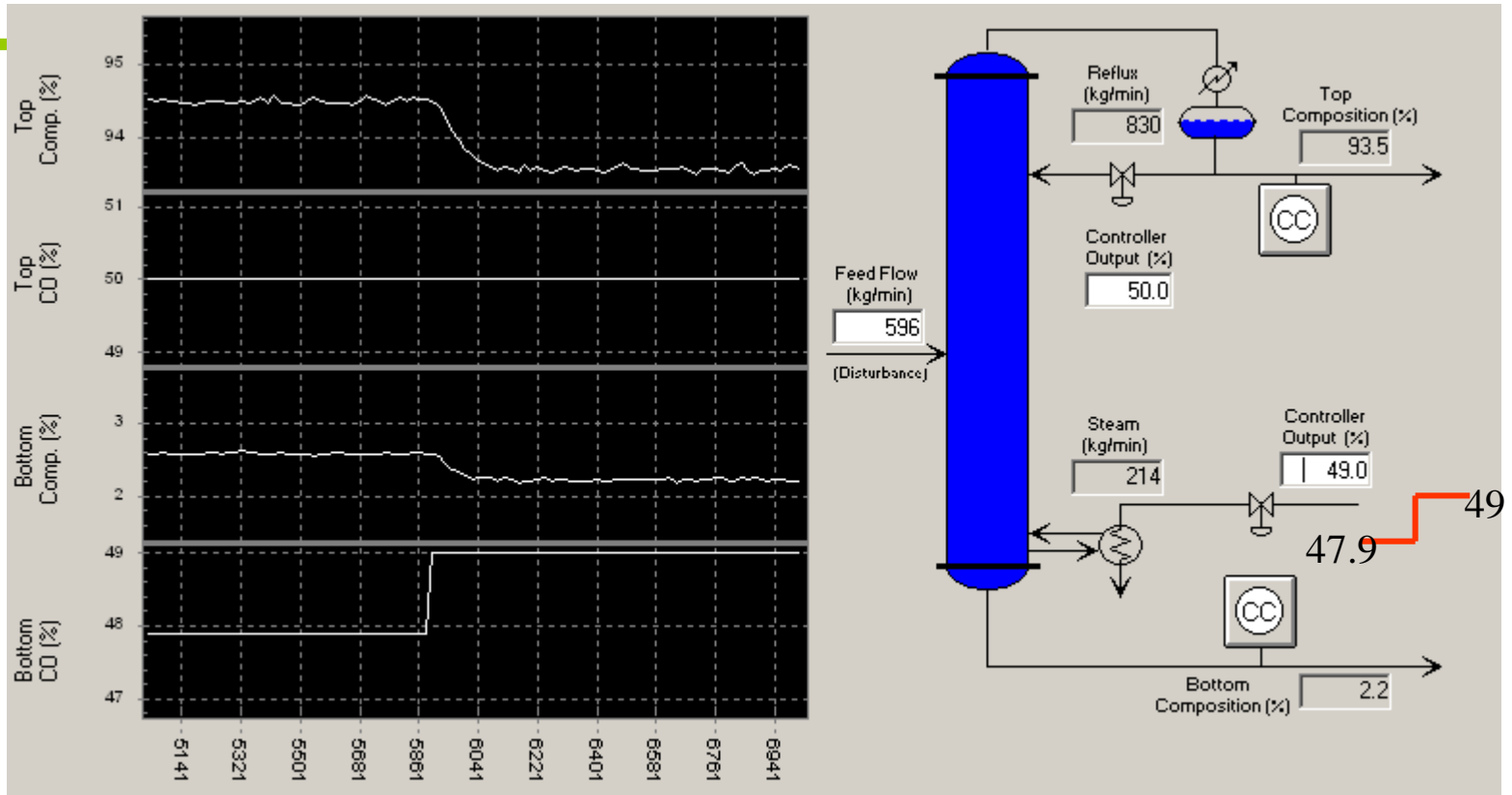
En sistemas  
no –lineales,  
cambios  
grandes  
pueden dar  
resultados no  
correctos

$$G_{11} = \frac{K_{11}e^{-d_{11}s}}{\tau_{11}s + 1} = \frac{0.99e^{-22.7s}}{72.8s + 1}$$

$$G_{21} = \frac{K_{21}e^{-d_{21}s}}{\tau_{21}s + 1} = \frac{0.38e^{-30.9s}}{66.65s + 1}$$



# Planificar bien el experimento



$$G_{12} = \frac{K_{12}e^{-d_{12}s}}{\tau_{12}s + 1} = \frac{-0.82e^{-22.36s}}{66.67s + 1}$$

$$G_{22} = \frac{K_{22}e^{-d_{22}s}}{\tau_{22}s + 1} = \frac{-0.35e^{-4.5s}}{57.02s + 1}$$



$$K = \begin{bmatrix} 0.648 & -0.894 \\ 0.815 & -0.236 \end{bmatrix}$$

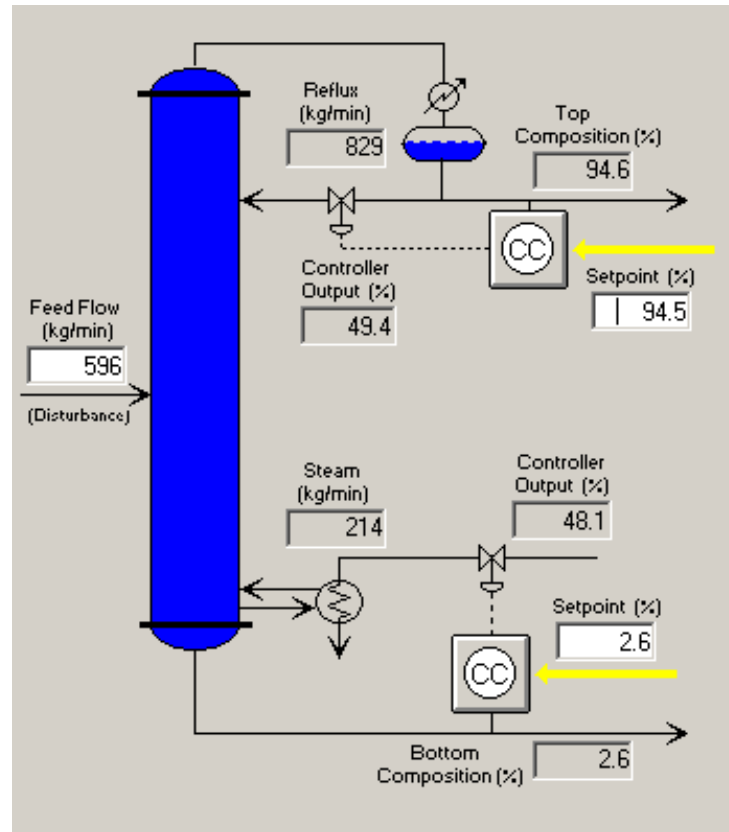
**RGA**

$$RGA = \begin{bmatrix} -0.265 & 1.265 \\ 1.265 & -0.265 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix}$$

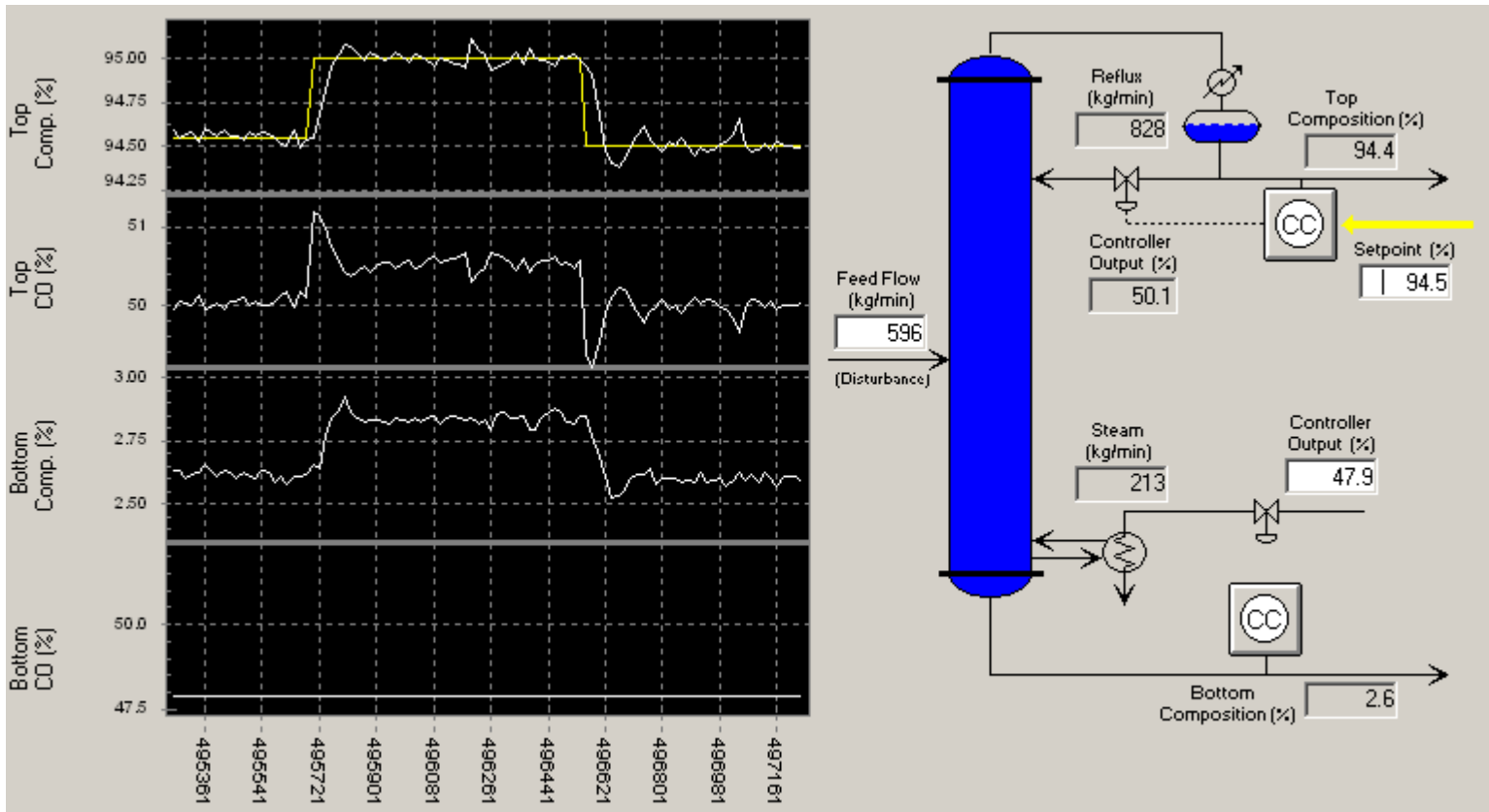
$$RGA = \begin{bmatrix} 9.1 & -8.1 \\ -8.1 & 9.1 \end{bmatrix}$$

Wrong gain matrix can indicate wrong pairing of variables





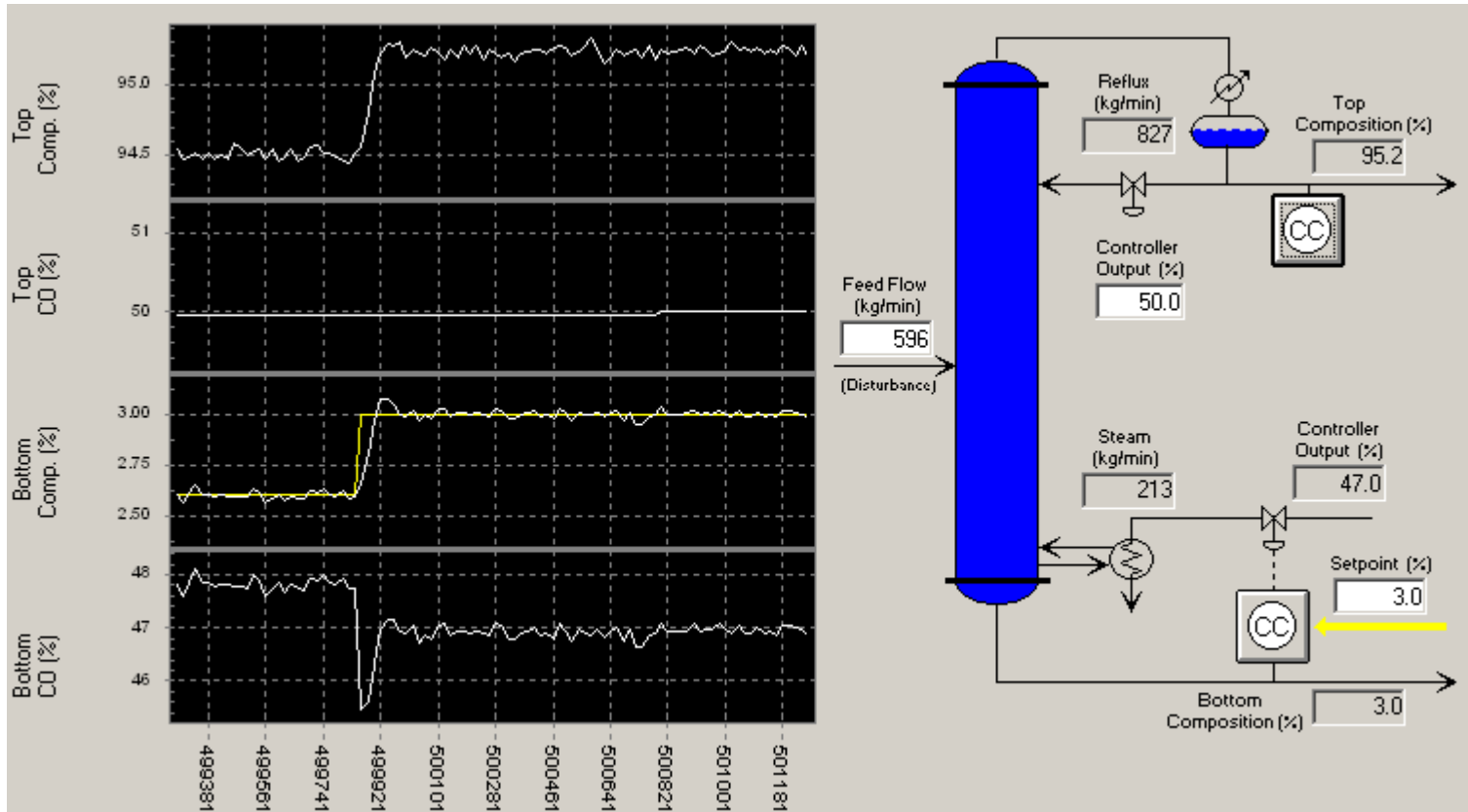
# Sintonía: Control de la composición de cabeza con el lazo de impurezas de fondo en manual



IMC tuning  $\lambda=50$  min.  $K_p = 2.19$ ,  $T_i = 70.85$  min.



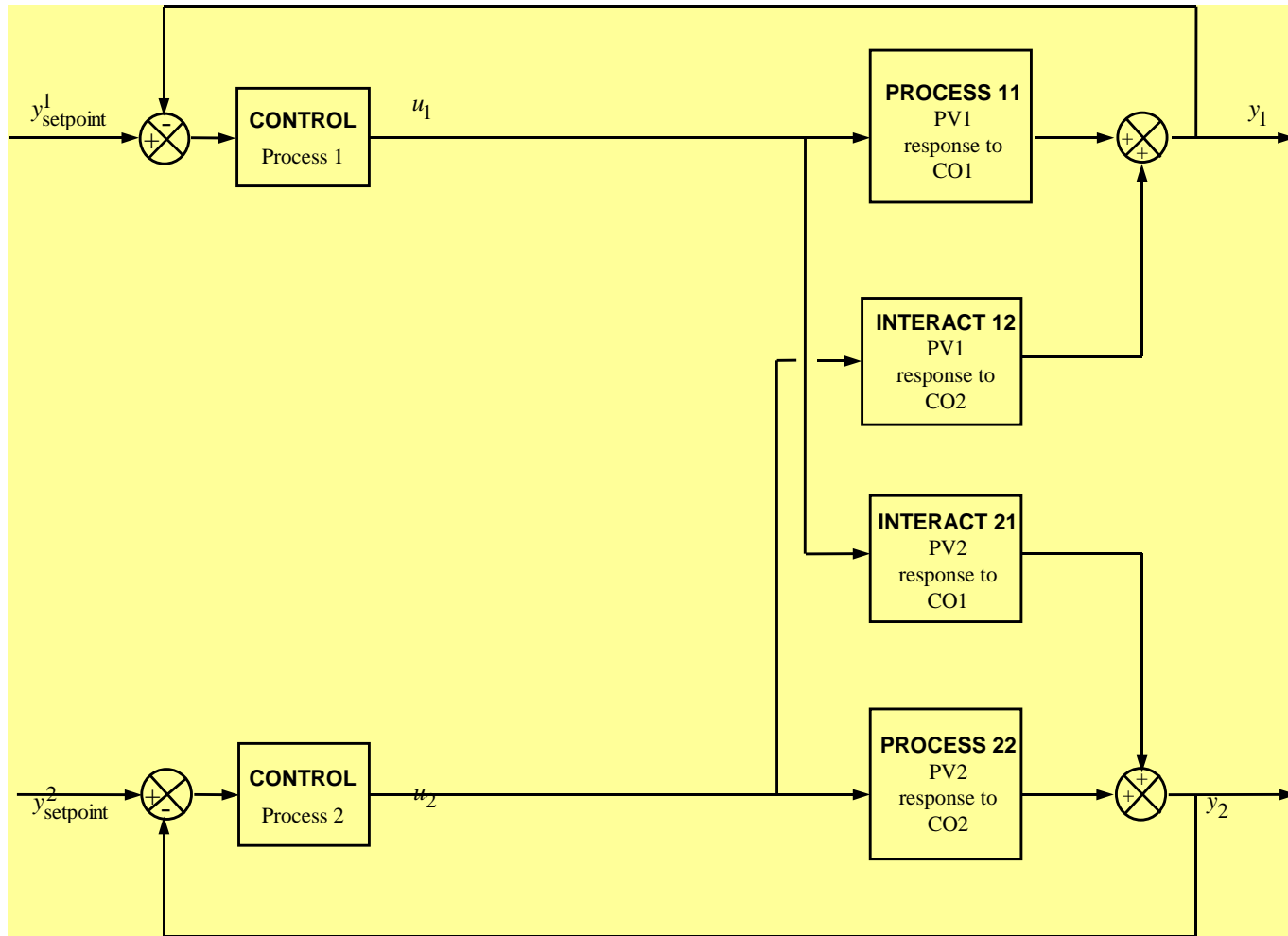
# Sintonía: Control de las impurezas del fondo con el lazo de composición de cabeza en manual



IMC tuning  $\lambda=35$  min.  $K_p = -5.47$ ,  $T_i = 45.2$  min.



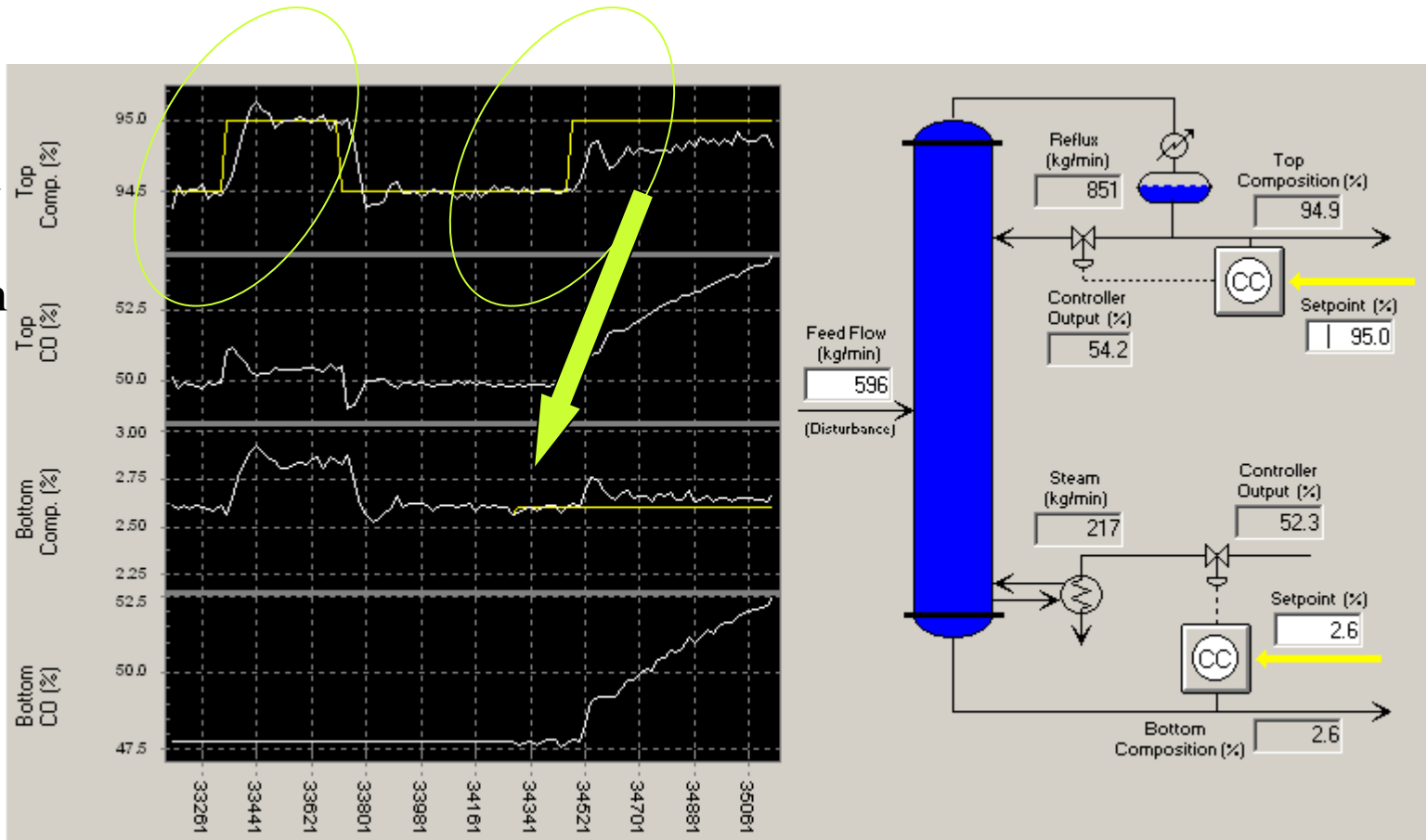
# Interacción entre lazos de control





# Cambio del lazo de impurezas de fondo de manual a automatico

La dinámica del lazo de composición de cabeza cambia mucho, al igual que la del fondo

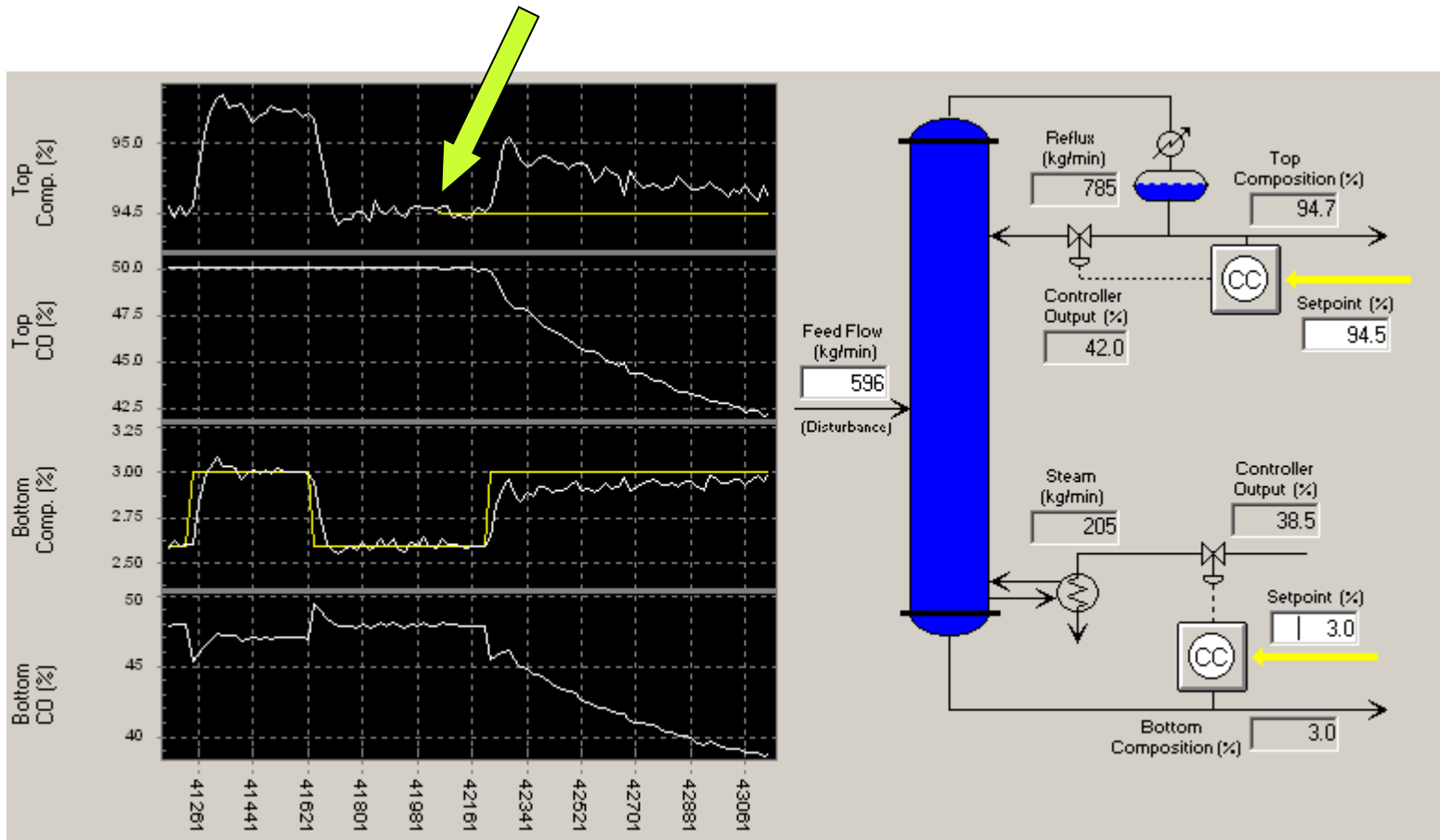




# Cambio del lazo de composición de cabeza de manual a automático



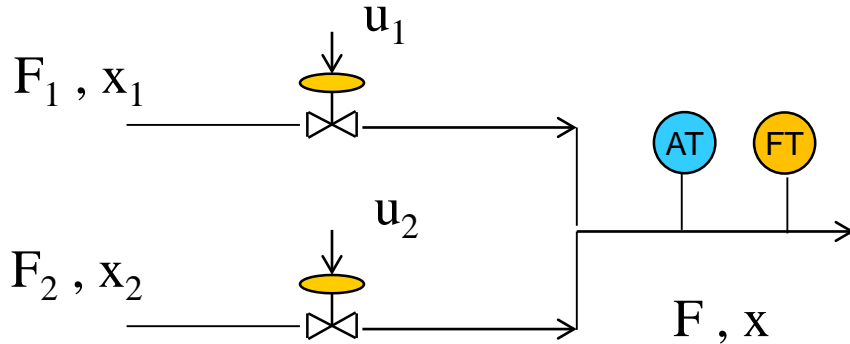
La dinámica del lazo de impurezas de fondo cambia mucho, al igual que la de la cabeza







# Proceso de mezcla



Balance caudal:

$$F = F_1 + F_2$$

Balance de Composición

$$F x = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

$$x = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \quad \Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$$

$$\Delta x = \frac{(F_1 + F_2)x_1 - (F_1 x_1 + F_2 x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \Delta F_1 + \frac{(F_1 + F_2)x_2 - (F_1 x_1 + F_2 x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \Delta F_2$$

$$\Delta x = \left. \frac{F_2 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \Delta F_1 - \left. \frac{F_1 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \Delta F_2$$

Linearización en un  
cierto punto estacionario



# Proceso de mezcla



Matriz de ganancias estacionarias

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{F_2 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} & - \left. \frac{F_1 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{bmatrix}$$

$$F = F_1 + F_2 \quad Fx = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Eliminando  $F_2$  entre ambas ecuaciones

$$F = F_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{x - x_2}$$



$$\lambda_{F, F_1} = \frac{1}{\left( \frac{x_1 - x_2}{x - x_2} \right)} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$Fx - Fx_2 = F_1 x_1 - F_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad Fx = F_1 x_1 - F_1 x_2 + Fx_2 = F_1 x_1 - F_1 x_2 + F_1 x_2 + F_2 x_2 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$



# Proceso de mezcla(Cont.)

La matriz de ganancias relativas **RGA** es:

	$F_1$	$F_2$
$F$	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$
$x$	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

¿Cuál es el mejor emparejamiento entre variables manipuladas y controladas? ¿De qué dependerá la respuesta?



# Proceso de mezcla

	$F_1$	$F_2$
$F$	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$
$x$	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

Para  $x = 0.32$

	$F_1$	$F_2$
$F$	0.2	0.8
$x$	0.8	0.2

Para  $x = 0.602$

	$F_1$	$F_2$
$F$	0.67	0.33
$x$	0.33	0.67

Suponiendo  $x_1 = 0.8$   $x_2 = 0.2$



# RGA( $j\omega$ )

---

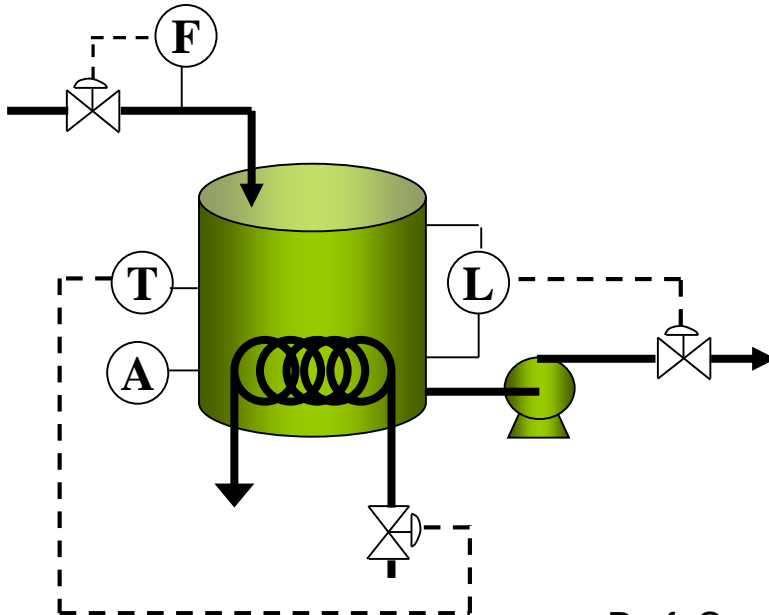
## RGA( $G(j\omega)$ )

La RGA se formuló originalmente sobre la matriz de ganancias estacionarias, frecuencia 0, pero puede evaluarse y dar información útil a cualquier otra frecuencia

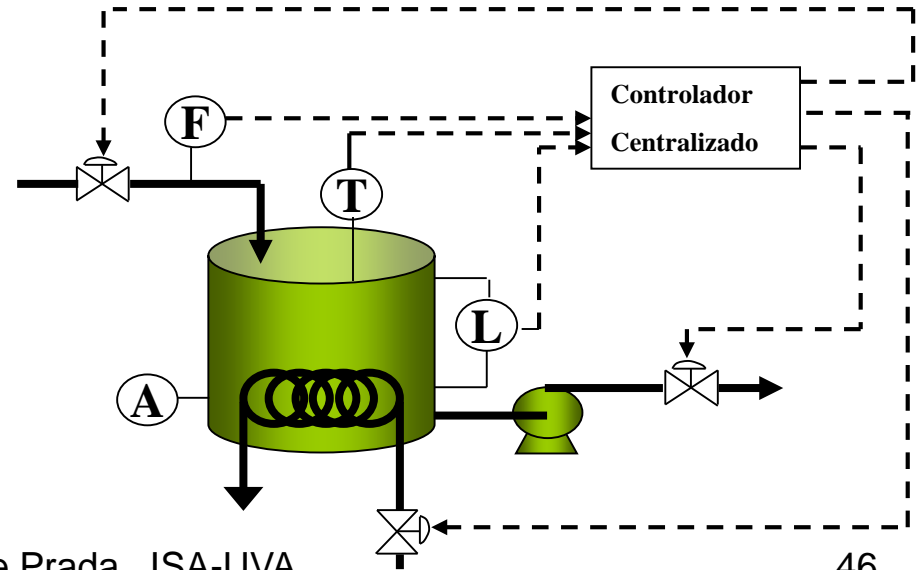


## MULTILOOP vs Centralizado

**Multiloop: varios controladores  
PID independientes**

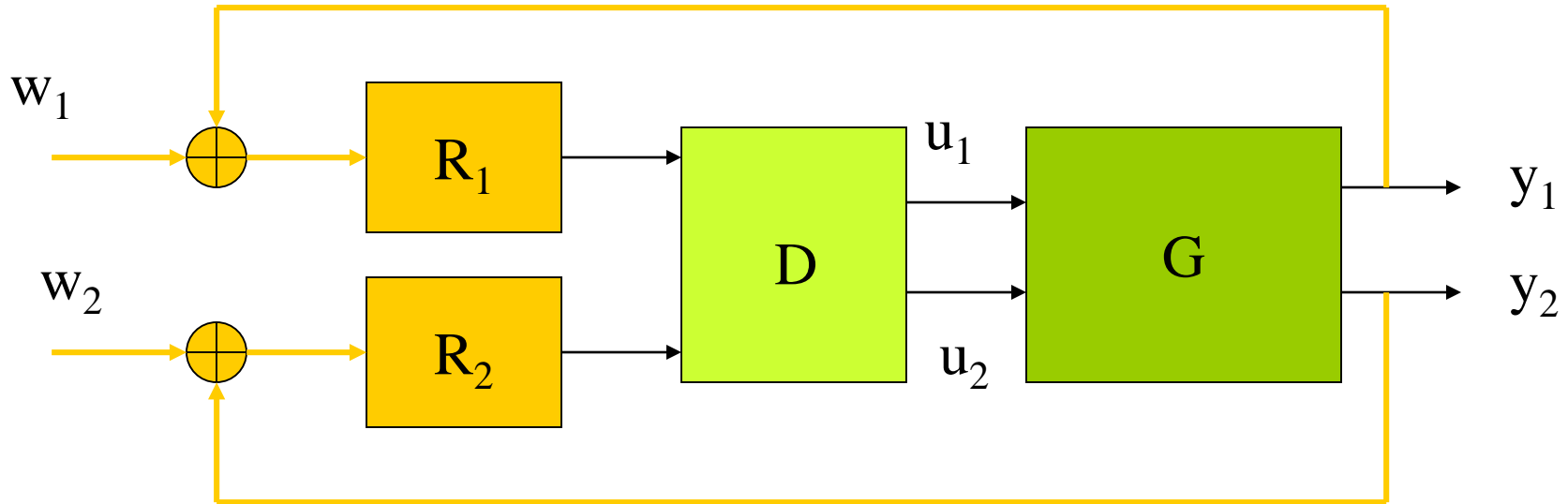


**Centralizado**



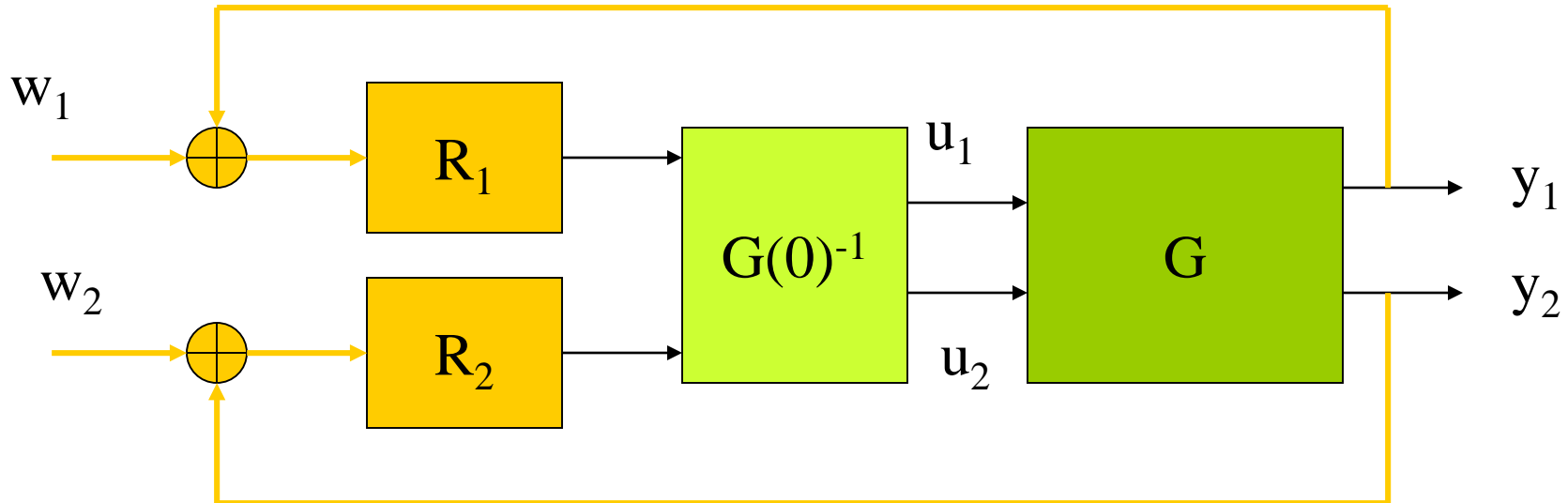


# Desacoplo



Encontrar la matriz  $D$ , tal que  $GD$  se comporte como una matriz diagonal o casi diagonal

# Desacoplo en estado estacionario

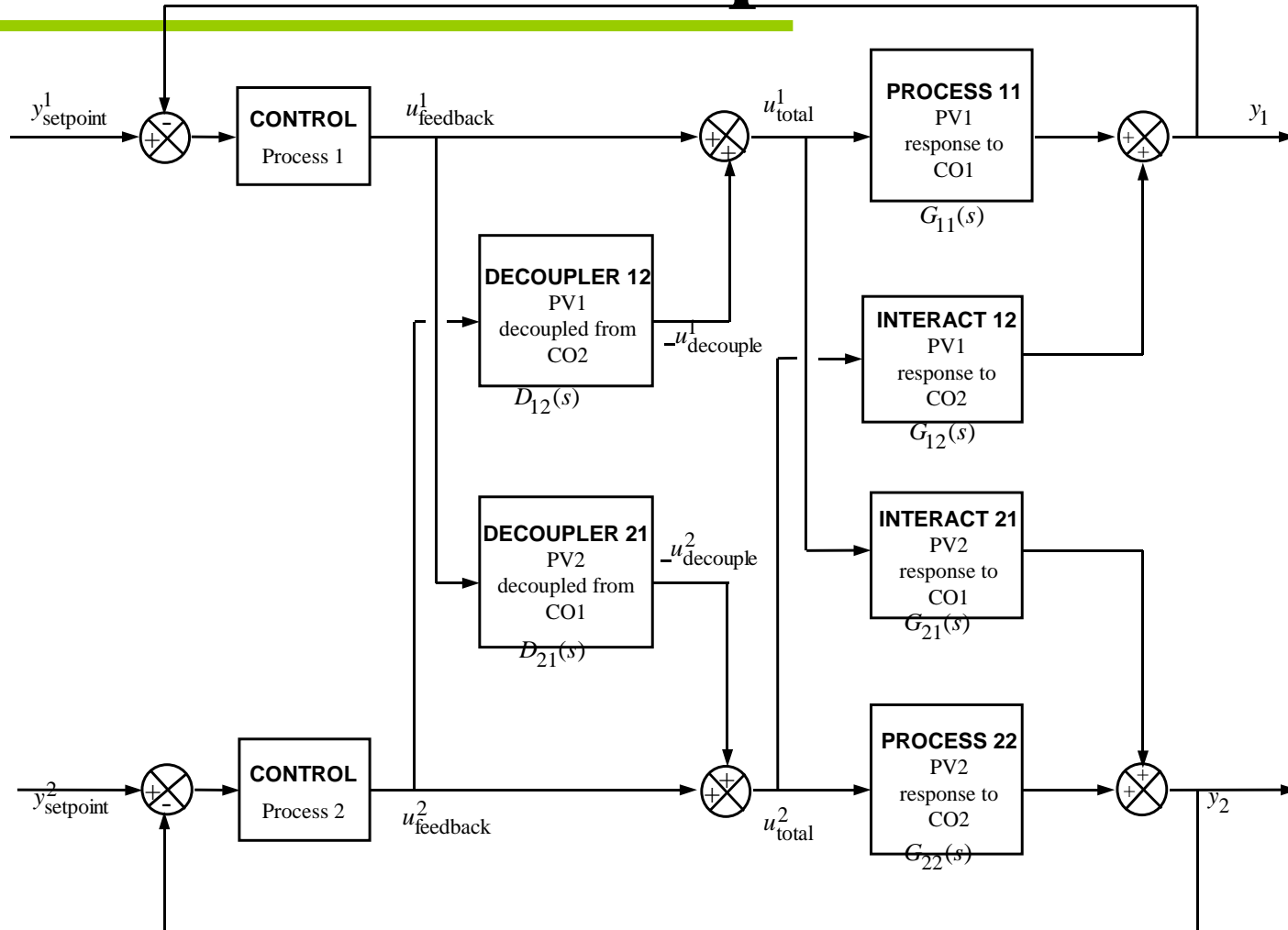


Si  $D = G(0)^{-1}$ , entonces  $G(s) G(0)^{-1}$  es diagonal en estado estacionario de modo que, en reposo, no hay interacción. Fácil de implementar y calcular,  $G(0)^{-1} =$  inversa de la matriz de ganancias estacionarias.





# Estructura de control con desacoplo



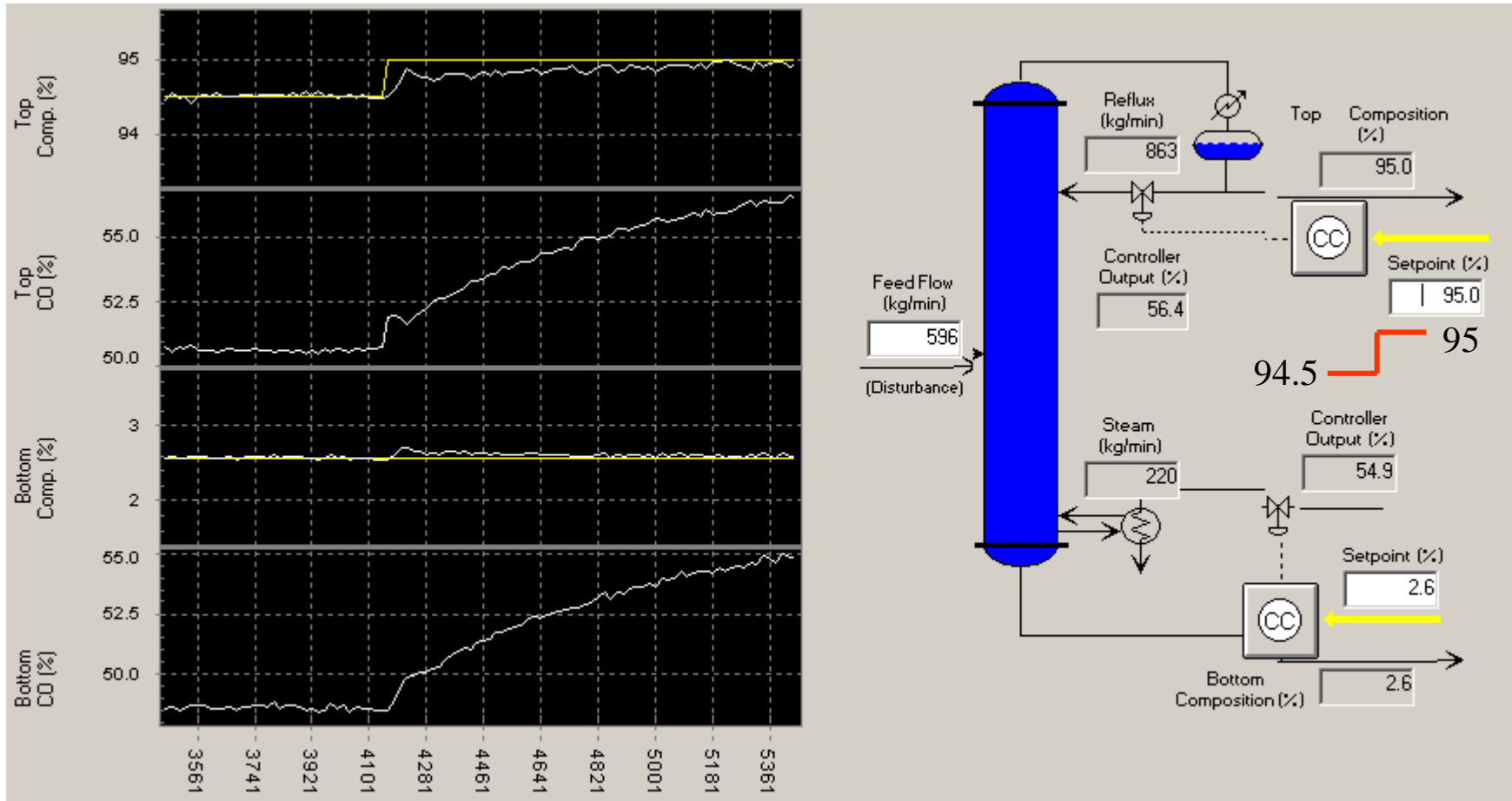


# 2x2 Multivariable Decoupling

- ✓ Requiere 4 modelos dinámicos
  - Process 11 (como  $CO_1$  impacta en  $PV_1$ )
  - Interact 12 (como  $CO_2$  impacta en  $PV_1$ )
  - Interact 21 (como  $CO_1$  impacta en  $PV_2$ )
  - Process 22 (como  $CO_2$  impacta en  $PV_2$ )
  
- ✓ Estos modelos deben construirse a partir de datos de planta, validados e incluidos en el diseño del controlador.
  
- ✓ El desacople de lazos no es una técnica muy empleada industrialmente porque su empleo requiere un esfuerzo significativo de modelado, sintonía y mantenimiento.

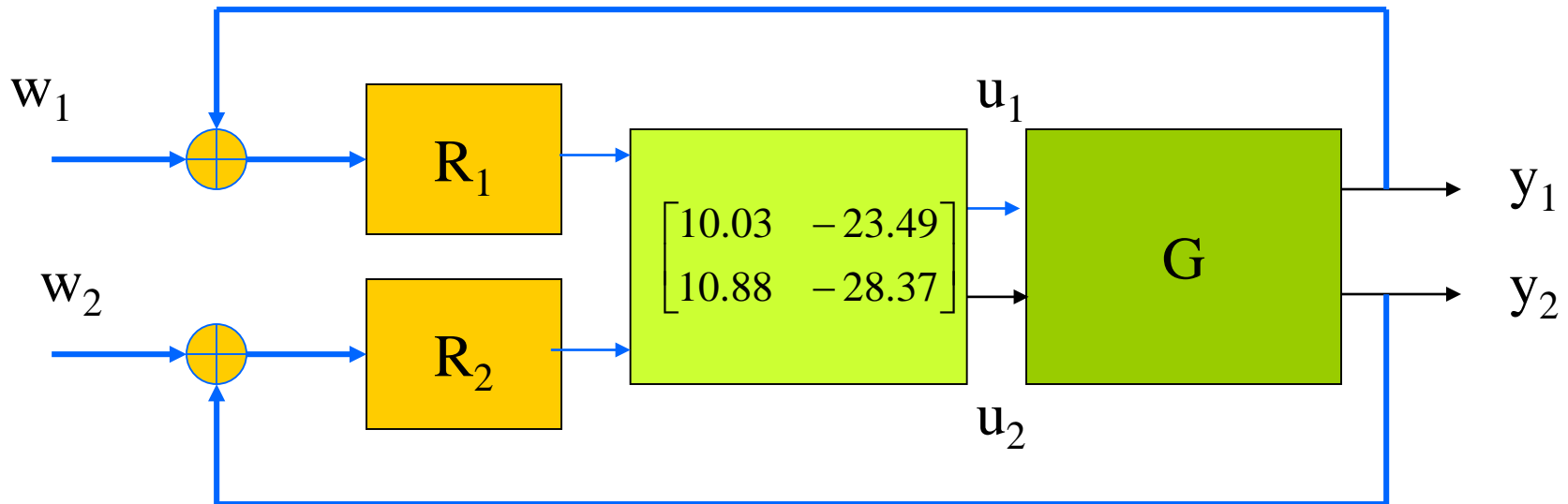


# Interacción, reguladores PI





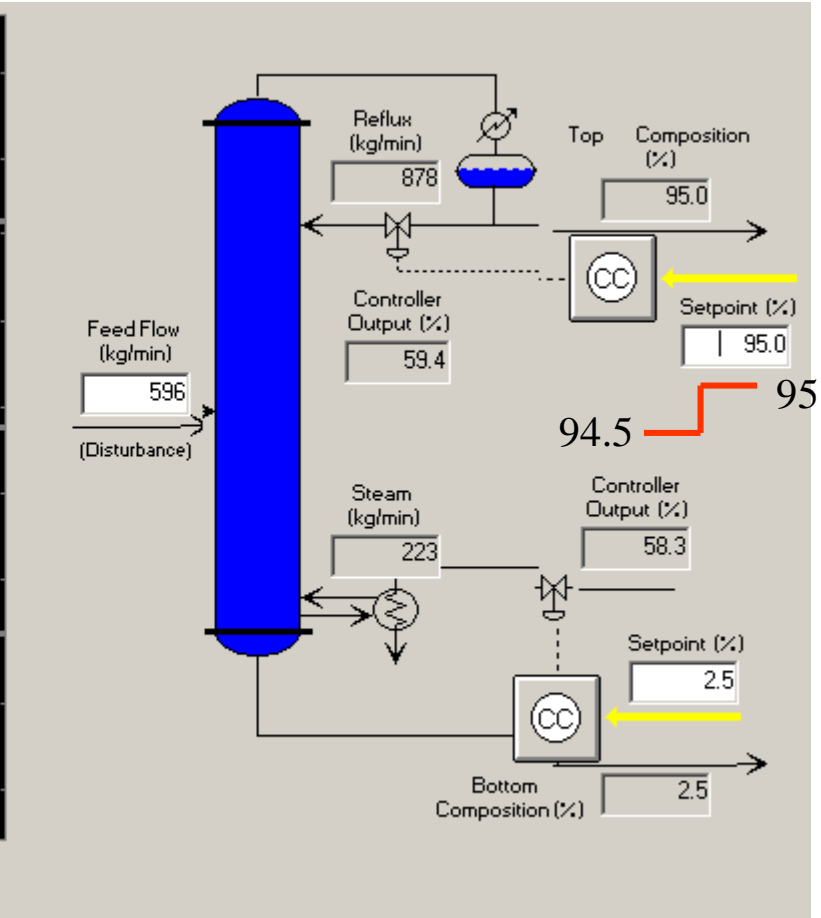
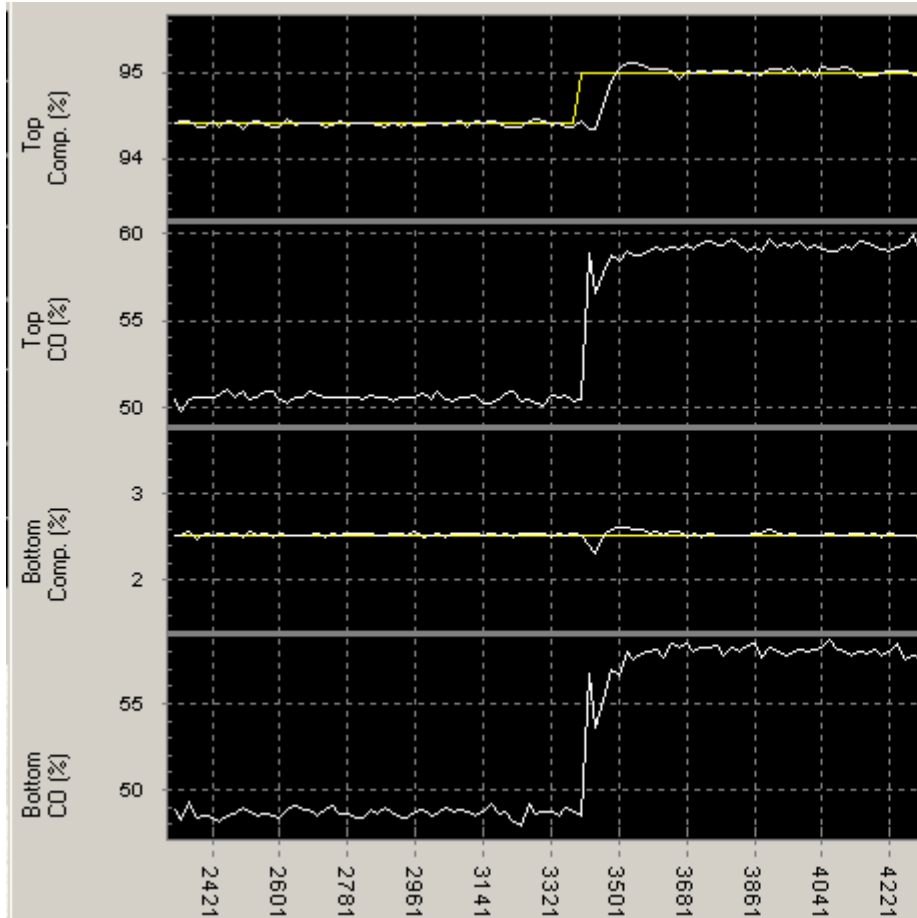
# Desacoplo en estado estacionario



$$G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10.03 & -23.49 \\ 10.88 & -28.37 \end{bmatrix}$$



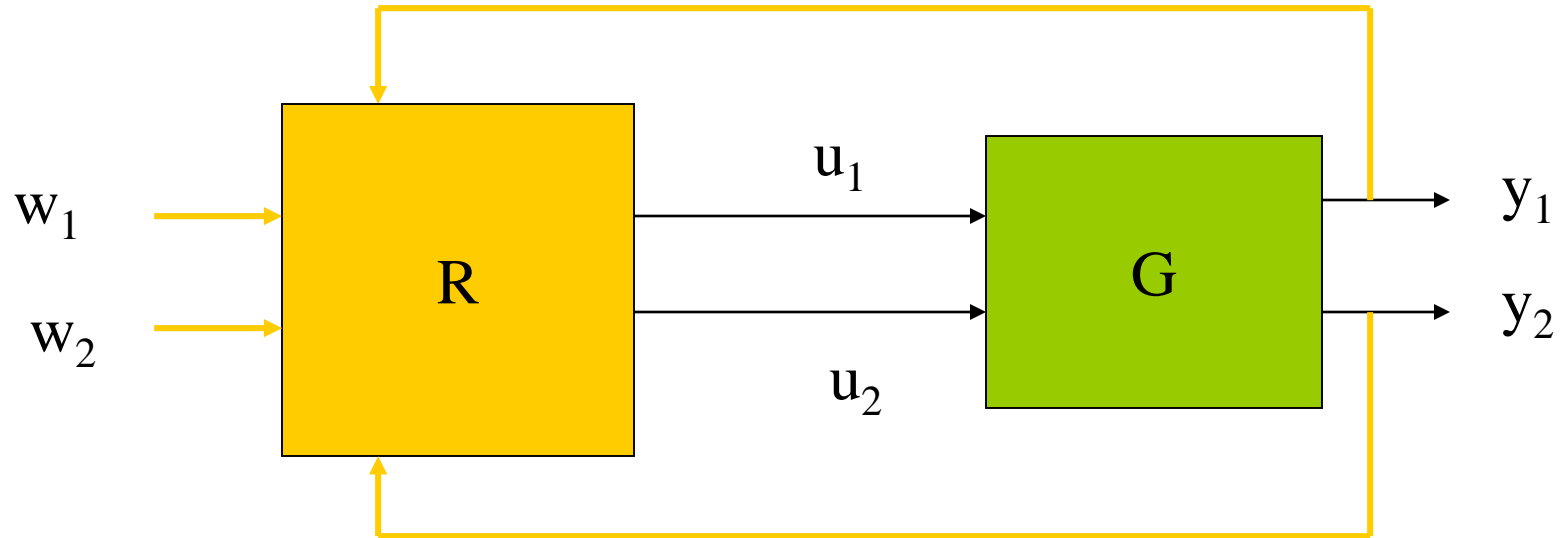
# Con matriz de desacoplo en ss







# Control multivariable



El controlador recibe señales de todas las salidas y simultáneamente calcula todas las señales de control teniendo en cuenta la interacción



# Control Predictivo multivariable

