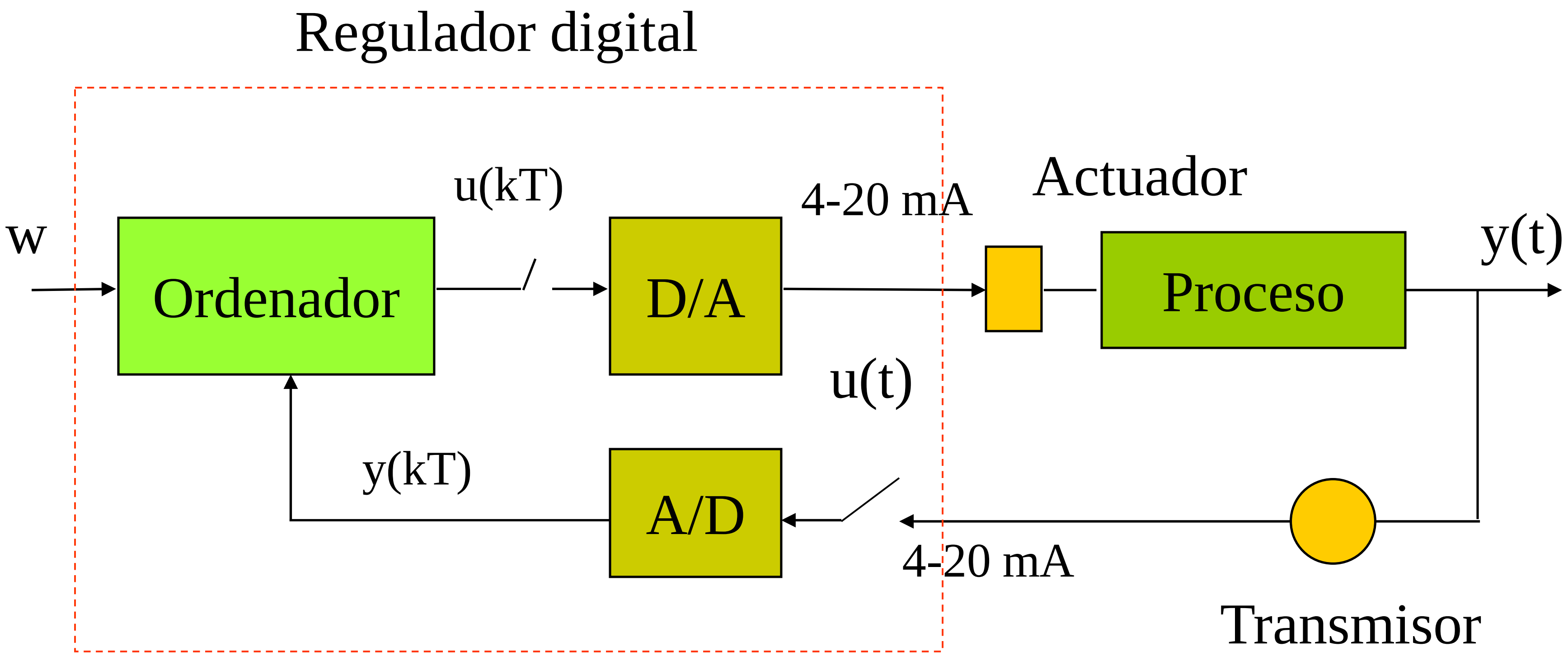
Modelos de procesos muestreados

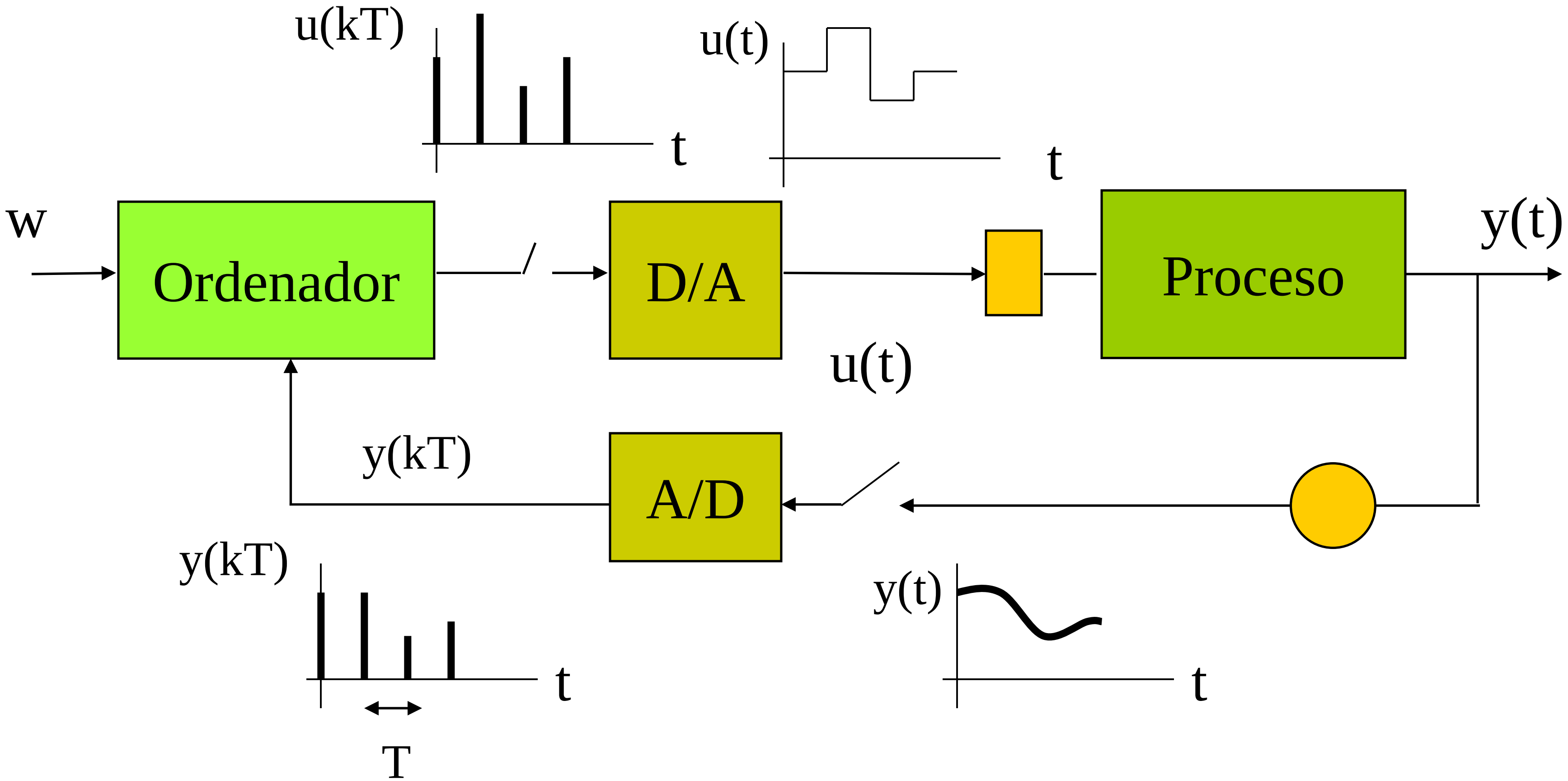
Prof. Cesar de Prada
Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática
UVA
prada@autom.uva.es

Control de procesos por computador



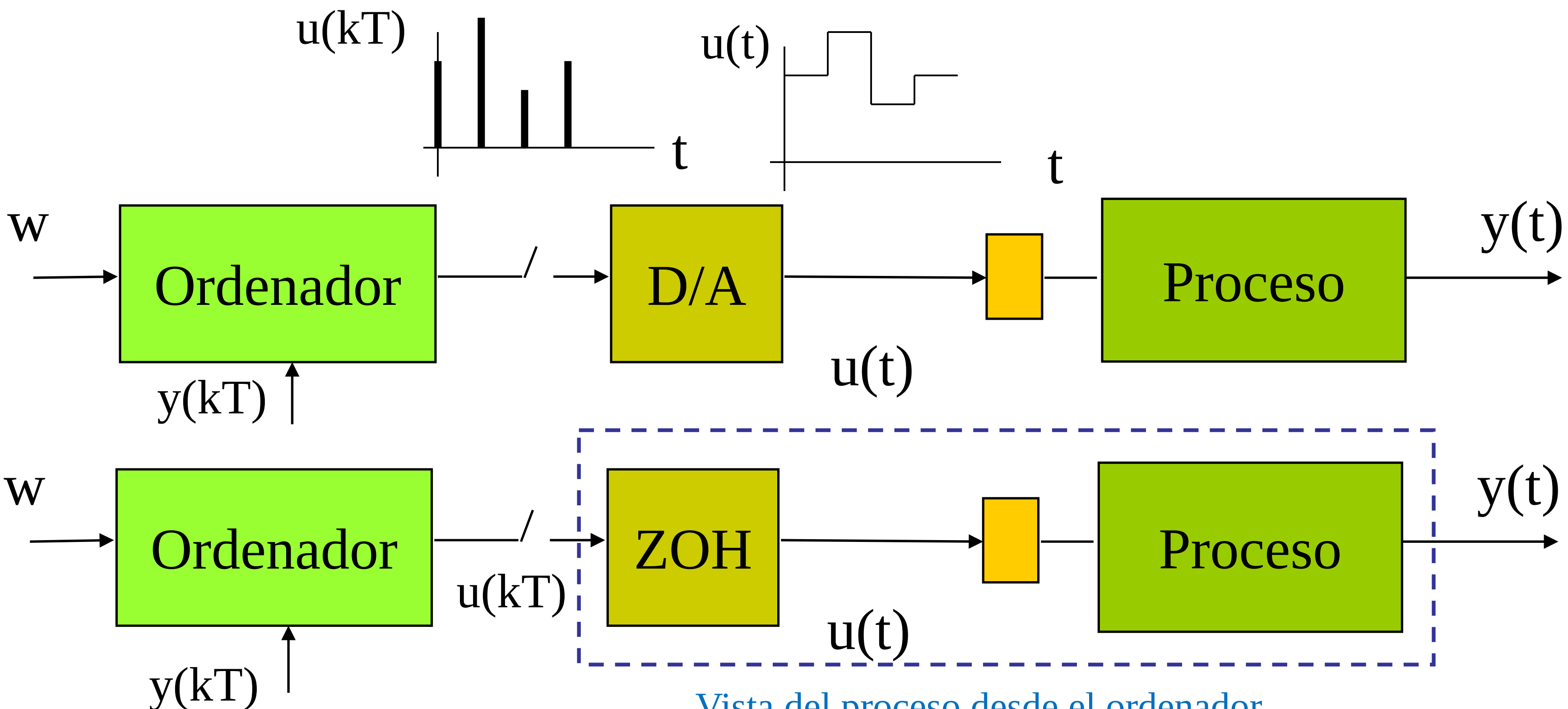
Las señales que recibe y procesa el ordenador son de naturaleza distinta: digitales y solo cambian en ciertos instantes de tiempo

Señales



La información en el ordenador se actualiza cada T unidades de tiempo (periodo de muestreo)

ZOH



Vista del proceso desde el ordenador

ZOH Zero Order Hold mantenedor de orden cero

Control digital

- En los sistemas discretos, todas las señales son secuencias de números,; Es decir, e{k}, que pueden cambiar los valores solamente en los instantes de muestreo, t_k=kT ((k=0,1,2..)

- En el controlador digital, la secuencia de control $u_k = u(kT)$ se calcula normalmente por una ecuación de recurrencia ó ecuación en diferencias que usa los valores almacenados del control previo y muestras del sensor o error anteriores y actual

Ejemplo:

$$u(k) = -a_1\, u(k-1) - a_2 u(k-1) \ldots - a_n u(k-n) + b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \ldots + b_m e(k-m)$$

- En el proceso las señales son continuas

Ejemplo de PID digital

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(\tau)d\tau + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

PID continuo

$$u(kT) = K_p\left(e(kT) + \frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT)T + T_d\frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}\right)$$

$$u((k-1)T) = K_p\left(e((k-1)T) + \frac{1}{T_i}\sum_{i=0}^{k-2} e(iT)T + T_d\frac{e((k-1)T) - e((k-2)T)}{T}\right)$$

$$u(kT) = u((k-1)T) + K_p\left(1 + \frac{T_d}{T}\right)e(kT) + K_p\left(\frac{T}{T_i} - \frac{2T_d}{T} - 1\right)e(k-1) + K_p\left(\frac{T_d}{T}\right)e(k-2)$$

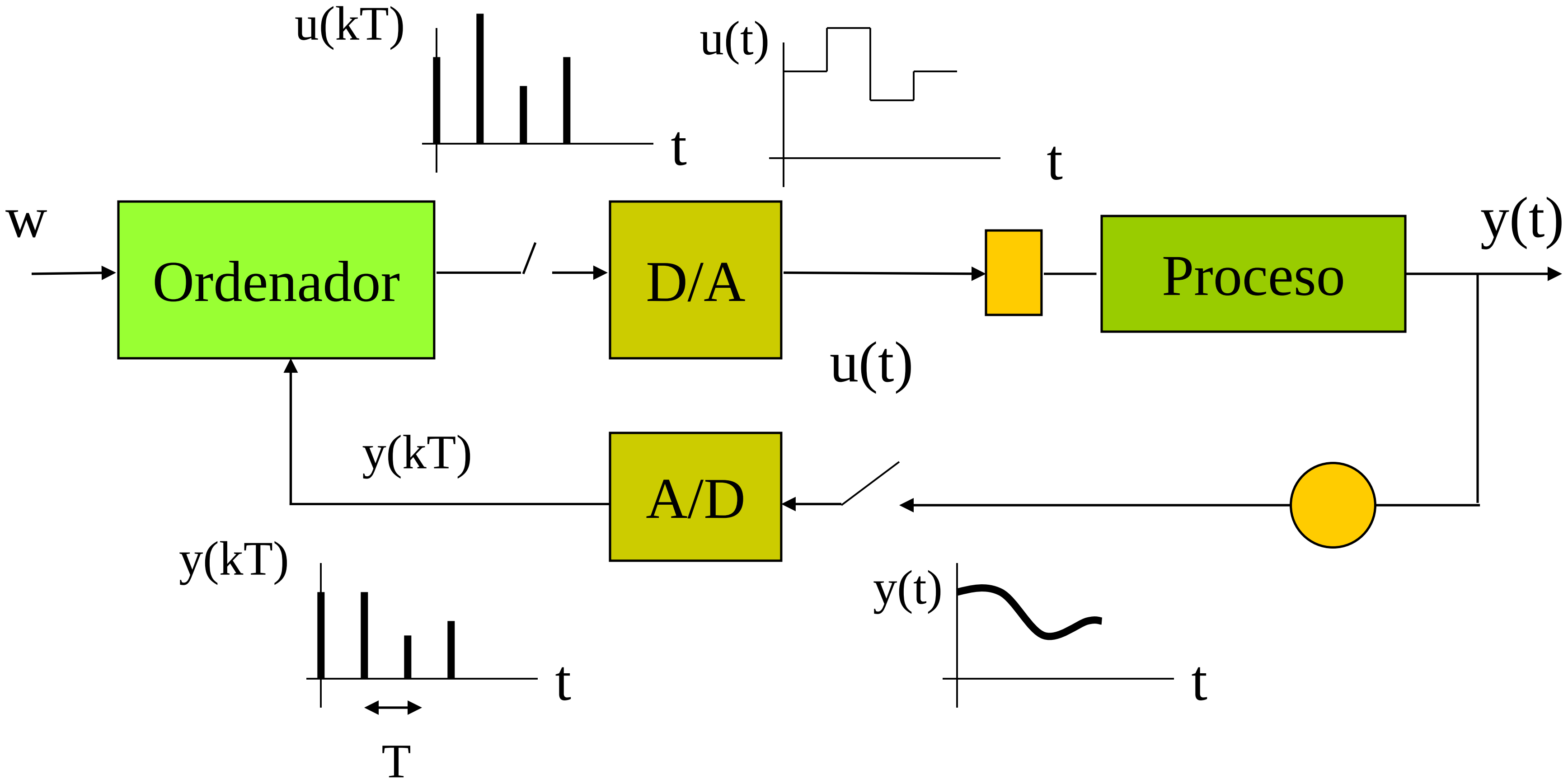
$$g_0 = K_p\left(1 + \frac{T_d}{T}\right) \quad g_1 = K_p\left(\frac{T}{T_i} - \frac{2T_d}{T} - 1\right) \quad g_2 = K_p\left(\frac{T_d}{T}\right)$$

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

$$u(t) = u(t-1) + g_0e(t) + g_1e(t-1) + g_2e(t-2)$$

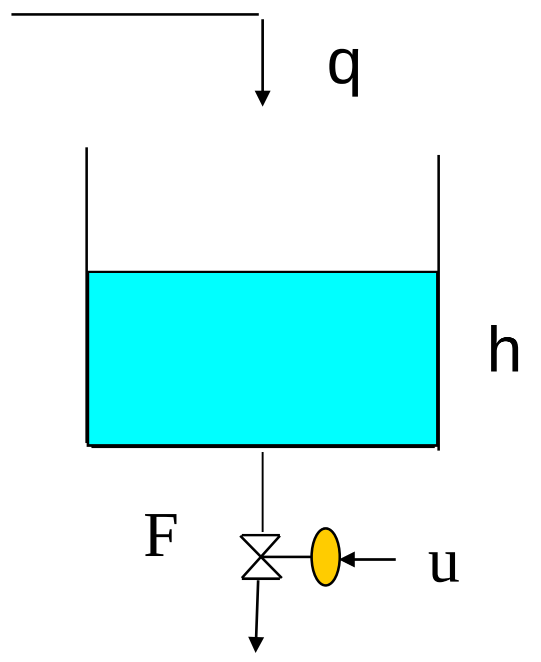
PID digital

Modelos de procesos muestreados



Necesidad de modelos que relacionen y(kT) e u(kT)

Modelado. Recordatorio



Conservación de masa

Acumulación=
flujo entrada q - flujo salida F

$$\frac{dm}{dt} = q\rho - F\rho$$

$$m = A\rho h \qquad F = u\,k\sqrt{h}$$

$$A\frac{dh}{dt} = q - u\,k\sqrt{h} \qquad V = Ah$$

Ecuación diferencial no-lineal

Ecuación algebraica

m masa en el depósito
A sección del depósito
ρ densidad,   k constante

Modelos linealizados

- Aproximaciones lineales de las ecuaciones no-lineales
- Mas fáciles de manipular matemáticamente pero su rango de validez es mas limitado

$$A\frac{dh}{dt} = q - k\sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad A\frac{d\Delta h}{dt} = \beta\Delta q - \alpha\Delta h$$

Linealización

Desarrollo en serie de Taylor sobre un punto de operación u_0, y_0, z_0, ….

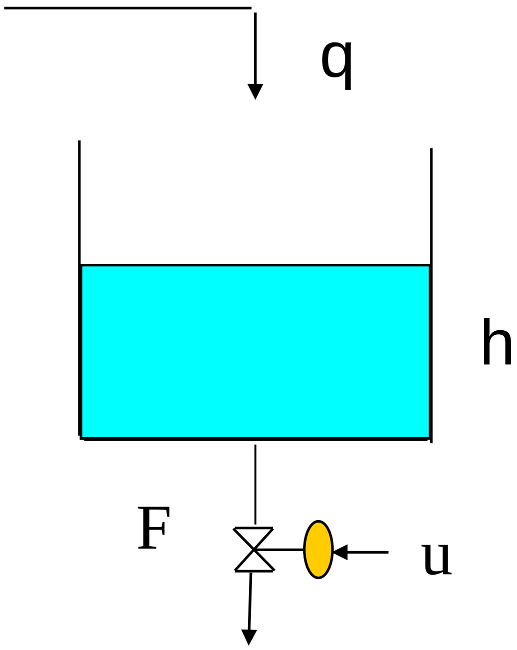
$$f(u,y,z)=0 \qquad f(u_0,y_0,z_0)=0$$

$$f(u,y,z)=f(u_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 (u-u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 (y-y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 (z-z_0)+\dots$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 \Delta z=0 \qquad \Delta u=u-u_0 \quad \Delta y=y-y_0 \quad \Delta z=z-z_0$$

Ecuación lineal en las nuevas variables Δu, Δy, Δz

Modelo Linealizado del Depósito



$$A\frac{dh}{dt} - q + uk\sqrt{h} = 0$$

$$f(\dot{h}, h, u, q) = 0 \qquad \dot{h}_0, h_0, u_0, q_0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_0 (\dot{h} - \dot{h}_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_0 (h - h_0) + + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 (u - u_0) \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_0 (q - q_0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_0 = A \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_0 = \frac{u_0 k}{2\sqrt{h_0}} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 = k\sqrt{h_0} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_0 = -1$$

$$A\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{u_0 k}{2\sqrt{h_0}} \Delta h + k\sqrt{h_0} \Delta u - \Delta q = 0$$

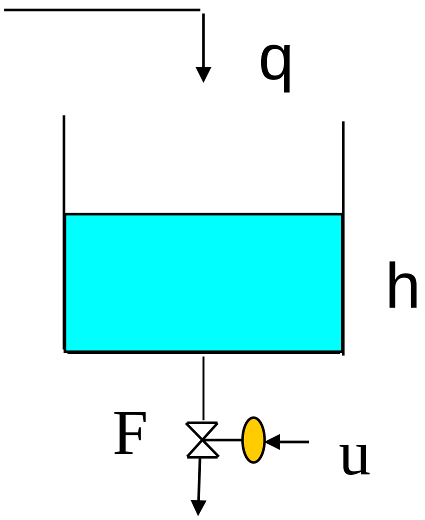
Variables desviación

$\Delta h = h - h_0$

$\Delta q = q - q_0$

Ecuación diferencial lineal

Modelos en variables de estado



$$\frac{d\Delta h}{dt} = -\frac{u_0 k}{2A\sqrt{h_0}}\Delta h - \frac{k\sqrt{h_0}}{A}\Delta u + \frac{1}{A}\Delta q$$

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \alpha\Delta h + \begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u \\ \Delta q\end{bmatrix}$$

$$\Delta h = 1.\Delta h$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A = \alpha = -\frac{u_0 k}{2A\sqrt{h_0}}$$

$$B = \begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-k\sqrt{h_0}}{A} & \frac{1}{A}\end{pmatrix}$$

Depende del punto de linealización

$$C = 1$$

Modelos en variables de estado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + \boxed{Du}$$

x variables de estado: conocido su valor en el instante inicial y los valores de u(t) a lo largo del tiempo, puede determinarse el valor de las salidas a lo largo del tiempo

Solución analítica:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Matriz de transición de estados

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$\phi(t) = e^{At}$ Matriz de transición de estados

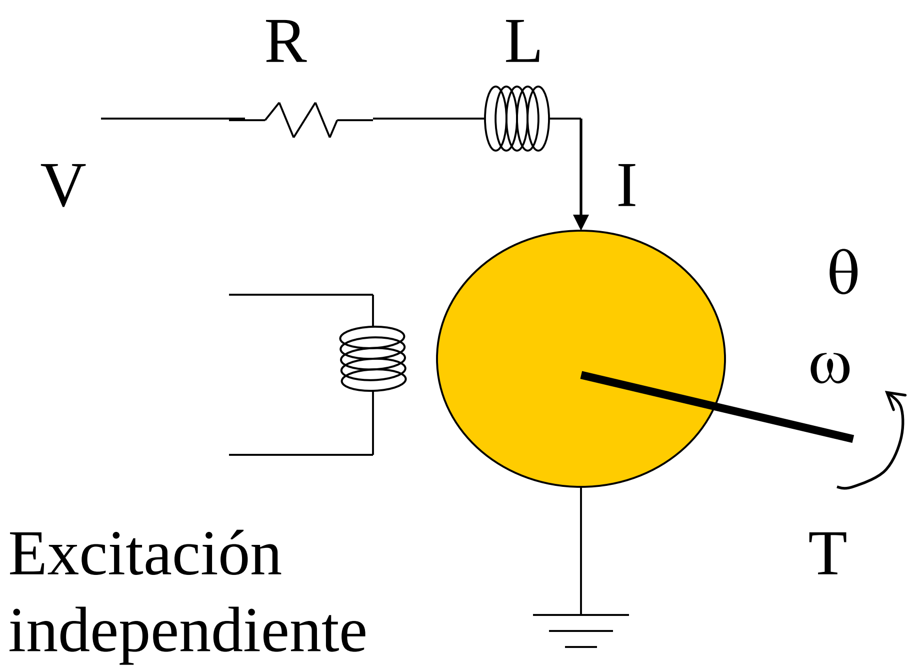
$\phi(t)$ verifica $\dfrac{d\phi}{dt} = A\phi, \;\; \phi(0) = I$

luego $s\Phi(s) - I = A\Phi(s)$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\ldots$$

Motor CC



$$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 I - f\omega - T$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} + k_2\omega$$

Modelo lineal

V voltaje aplicado — ω velocidad de giro — T par externo

I corriente del rotor — θ Angulo girado — $k_2\omega$ f.c.e.m

Modelo en variables de estado

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot I\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -f/J & k_e/J\\ 0 & -k_2/L & -R/L\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1/J\\ 1/L & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}V\\ T\end{bmatrix}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 I - f\omega - T$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$[\theta] = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ I\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}}$$

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} + k_2\omega$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \left(\frac{-k_1k_2}{RJ} - \frac{f}{J}\right)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{k_1}{RJ} & \frac{-1}{J}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}V\\ T\end{bmatrix}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 I - f\omega - T$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$[\theta] = (1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

Si L=0 $\quad V = RI + k_2\omega$

Condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & (\frac{-k_1k_2}{RJ}-\frac{f}{J})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{k_1}{RJ} & \frac{-1}{J}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}V\\ T\end{bmatrix}$$

$$[\theta]=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales no necesariamente nulas

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_0\\ \dot{\omega}_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & (\frac{-k_1k_2}{RJ}-\frac{f}{J})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta_0\\ \omega_0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{k_1}{RJ} & \frac{-1}{J}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}V_0\\ T_0\end{bmatrix}$$

Particularizando en un punto de operación

$$[\theta_0]=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta_0\\ \omega_0\end{bmatrix}$$

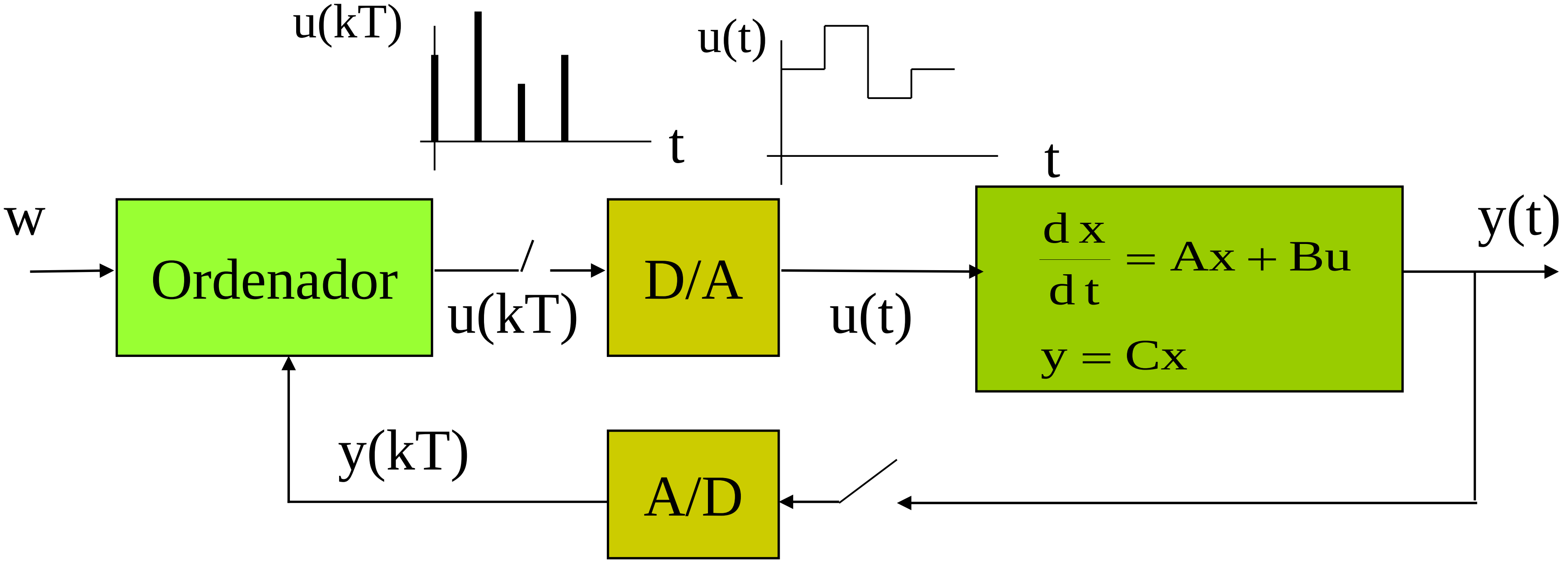
Restando:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\theta}\\ \Delta\dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & (\frac{-k_1k_2}{RJ}-\frac{f}{J})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\ \Delta\omega\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{k_1}{RJ} & \frac{-1}{J}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta T\end{bmatrix}$$

$$[\theta]=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}\Delta\theta\\ \Delta\omega\end{bmatrix}$$

Modelo de perturbación con condiciones iniciales nulas

Modelo discretizado



Encontrar un modelo y(kT) = f(u(kT)) tal que y(kT) = y(t) en los instantes de muestreo

Modelo discretizado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

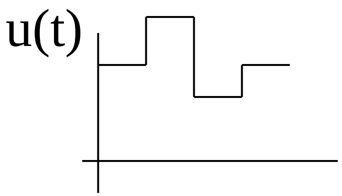
$$y = Cx + Du$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Tomando como tiempos de inicio y final los instantes kT y (k+1)T de un periodo de muestreo:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

Modelo discretizado



Durante un periodo de muestreo u(t) es constante e igual a u(kT)

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma =$$

$$= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma\ Bu(kT)$$

$$\text{cambio de variable}: \quad \tau = (k+1)T - \sigma, \quad d\tau = -d\sigma$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{0}^{T} e^{A\tau}d\tau\ Bu(kT)$$

Modelo discretizado

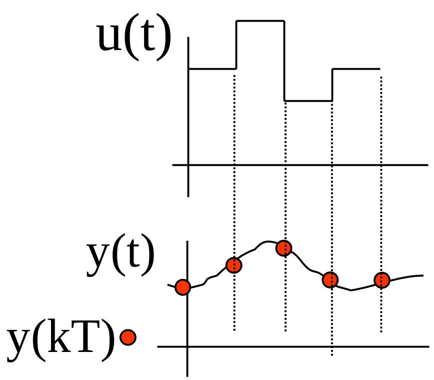
$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) \\ & y(kT) = Cx(kT) \\ & \Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B \end{aligned}}$$

Matlab c2d

Ecuación en diferencias



Para este tipo de entradas, el modelo discretizado da los mismos valores en los instantes t = kT que el modelo continuo. (Partiendo del mismo estado inicial y aplicando las mismas entradas)

Modelo discretizado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$

Formulaciones similares

$$x(kT) = \Phi x((k-1)T) + \Gamma u((k-1)T)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$

Ejemplo: Depósito

Si $\Delta q = 0$:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \alpha \Delta h + \beta \Delta u$$

$$\Delta h = 1.\Delta h$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau\, B$$

$$\Phi = e^{\alpha T} \quad \Gamma = \int_0^T e^{\alpha\tau} d\tau\, \beta = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1)$$

$$\boxed{\Delta h((k+1)T) = e^{\alpha T} \Delta h(kT) + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1)\Delta u(kT)}$$

Modelo discretizado: Ecuación en diferencias

Ejemplo: Depósito

Si $\Delta q = 0$:

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \alpha\Delta h + \beta\Delta u$$

$$\Delta h = 1.\Delta h$$

Si

$$\alpha = \frac{-u_0 k}{2A\sqrt{h_0}} = -1.252$$

$$\beta = \frac{-k\sqrt{h_0}}{A} = -0.167$$

$$T = 0.5$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Delta h((k+1)T) = e^{\alpha T}\Delta h(kT) + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1)\Delta u(kT)$$

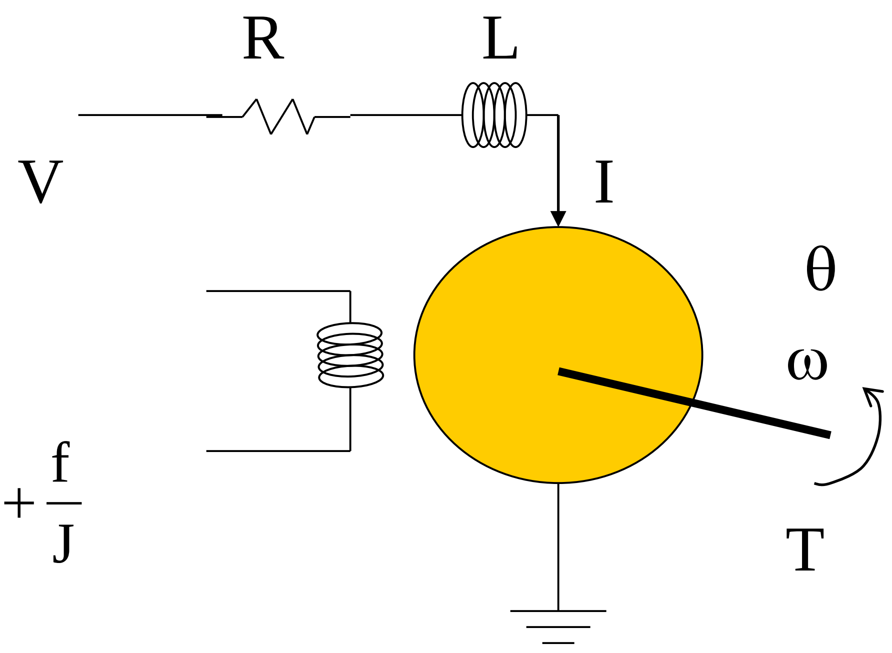
$$\boxed{\Delta h((k+1)0.5) = 0.535\Delta h(k0.5) - 0.062\Delta u(k0.5)}$$

Modelo discretizado: Ecuación en diferencias

Ejemplo: Motor

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \left(\dfrac{-k_1k_2}{RJ}-\dfrac{f}{J}\right)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{k_1}{RJ} & \dfrac{-1}{J}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}V\\ T\end{bmatrix}$$

$$[\theta]=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}V$$

$$[\theta]=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

$$\alpha=\frac{k_1k_2}{RJ}+\frac{f}{J}$$

$$\beta=\frac{k_1}{RJ}$$

Ejemplo: Motor

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}V$$

$$[\theta] = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau\, B$$

$$\Phi = e^{At}\Big|_{t=T} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]_{t=T} = L^{-1}\left[\left(\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\right)^{-1}\right]_{t=T} =$$

$$= L^{-1}\left[\begin{pmatrix}s & -1\\ 0 & s+\alpha\end{pmatrix}^{-1}\right]_{t=T} = L^{-1}\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\alpha)}\\ 0 & \frac{1}{s+\alpha}\end{pmatrix}\right]_{t=T} = \begin{pmatrix}1 & 1-e^{-\alpha T}/\alpha\\ 0 & e^{-\alpha T}\end{pmatrix}$$

Ejemplo: Motor

$$\Phi = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-\alpha T}/\alpha \\ 0 & e^{-\alpha T} \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau\, B = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-\alpha\tau}/\alpha \\ 0 & e^{-\alpha\tau} \end{pmatrix} d\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T \begin{pmatrix} \beta(1-e^{-\alpha\tau})/\alpha \\ \beta e^{-\alpha\tau} \end{pmatrix} d\tau = \frac{\beta}{\alpha} \begin{pmatrix} T - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 1-e^{-\alpha T} \end{pmatrix}$$

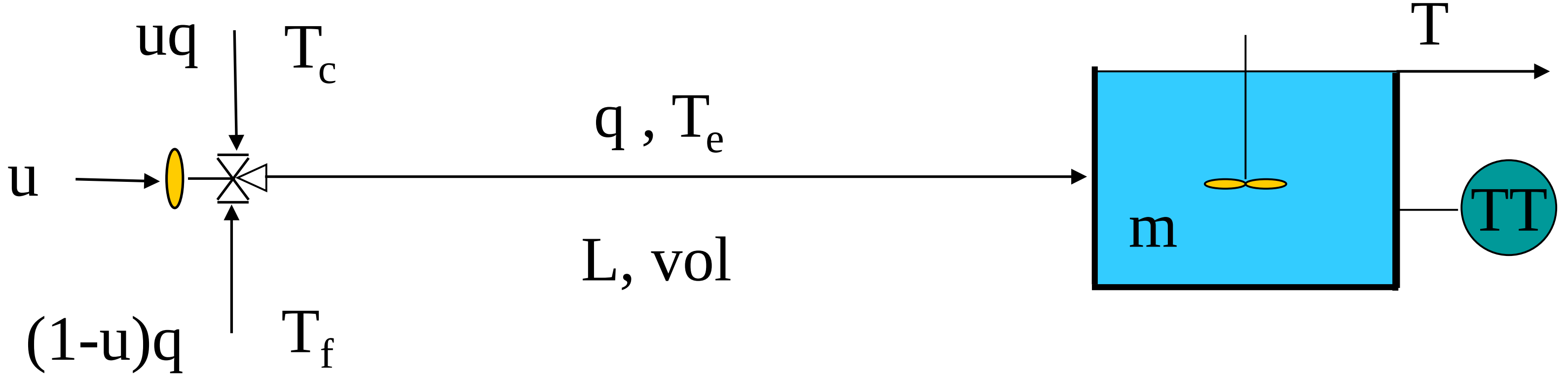
Para $\alpha = 5.108$ $\beta = 500$ y $T = 0.1$

$$\begin{bmatrix} \theta((k+1)0.1) \\ \omega((k+1)0.1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.078 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta(k0.1) \\ \omega(k0.1) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2.123 \\ 39.154 \end{pmatrix} V(k0.1)$$

$$[\theta(k0.1)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta(k0.1) \\ \omega(k0.1) \end{bmatrix}$$

Un proceso con retardo (de transporte)

u: señal en tanto por uno



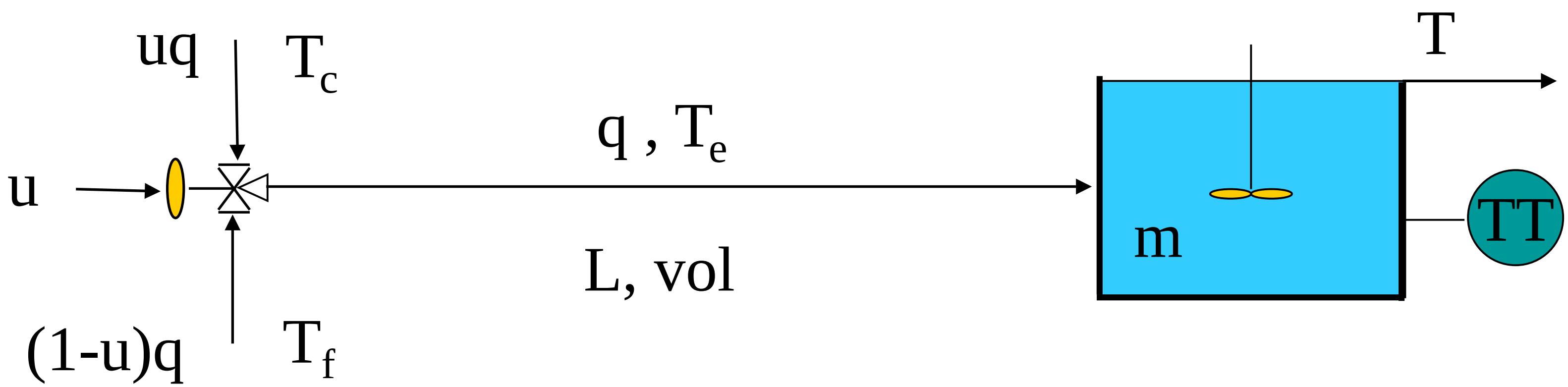
$$q\rho c_e T_e(t) = u(t) q\rho c_e T_c + (1-u(t)) q\rho c_e T_f \Rightarrow T_e(t) = u(t) T_c + (1-u(t)) T_f$$

$$\frac{d\, V\rho c_e T(t)}{dt} = q\rho c_e T_e(t-\tau) - q\rho c_e T(t) \qquad \tau = \frac{L}{v} = \frac{LA}{vA} = \frac{vol}{q}$$

$$\frac{V}{q}\frac{d\, T(t)}{dt} = (T_c - T_f) u(t-\tau) + T_f - T(t)$$

Suponiendo ρ, c_e ctes.

Mezcla con retardo



$$\frac{V}{q}\frac{dT(t)}{dt} = (T_c - T_f)u(t-\tau) + T_f - T(t)$$

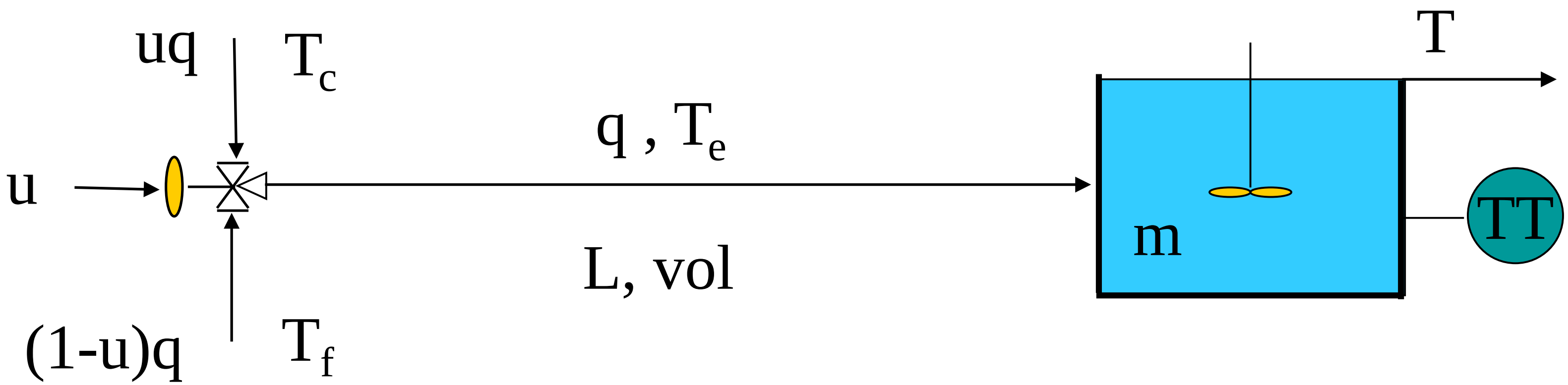
$$\frac{V}{q}\frac{dT_0}{dt} = (T_c - T_f)u_0 + T_f - T_0$$

T_0 , u_0 punto de operación estacionario

$$\frac{V}{q}\frac{d\Delta T(t)}{dt} = (T_c - T_f)\Delta u(t-\tau) - \Delta T(t)$$

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0 \qquad \Delta u(t) = u(t) - u_0$$

Mezcla con retardo



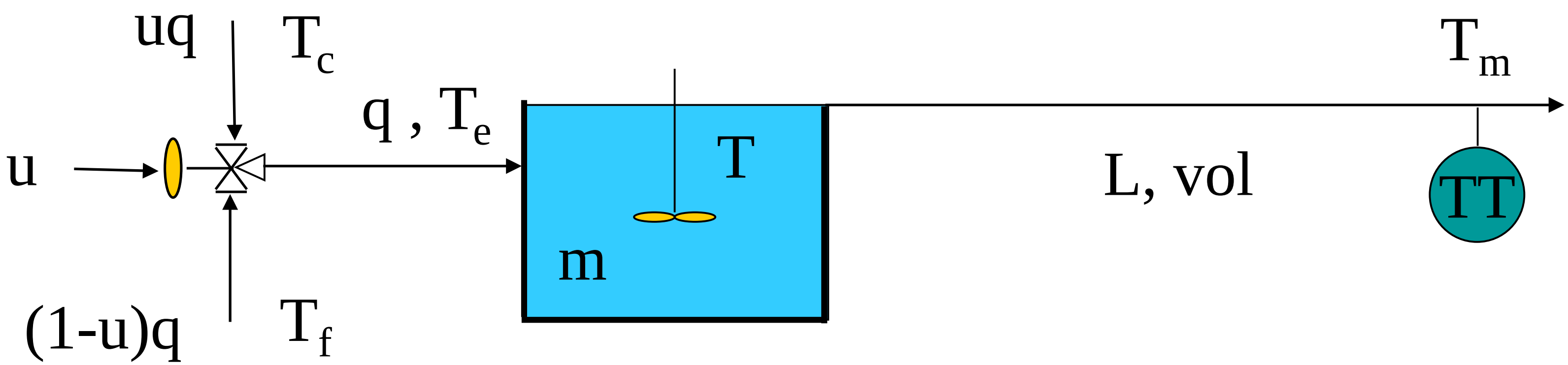
$$\frac{V}{q}\frac{d\Delta T(t)}{dt} + \Delta T(t) = (T_c - T_f)\Delta u(t-\tau) \Rightarrow T(s) = \frac{e^{-\tau s}(T_c - T_f)}{\frac{V}{q}s + 1}U(s)$$

$$\frac{d\Delta T(t)}{dt} = -\frac{q}{V}\Delta T(t) + \frac{q(T_c - T_f)}{V}\Delta u(t-\tau) \qquad \Delta T(t) = 1.\Delta T(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\,x(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t-\tau)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}}$$

Modelo con retardo a la entrada

Retardo a la salida



$$\frac{V}{q}\frac{d\,\Delta T(t)}{dt} + \Delta T(t) = (T_c - T_f)\Delta u(t) \qquad \Delta T_m(t+\tau) = \Delta T(t)$$

$$\frac{d\,\Delta T(t)}{dt} = -\frac{q}{V}\Delta T(t) + \frac{q(T_c - T_f)}{V}\Delta u(t) \qquad \Delta T_m(t+\tau) = 1.\Delta T(t)$$

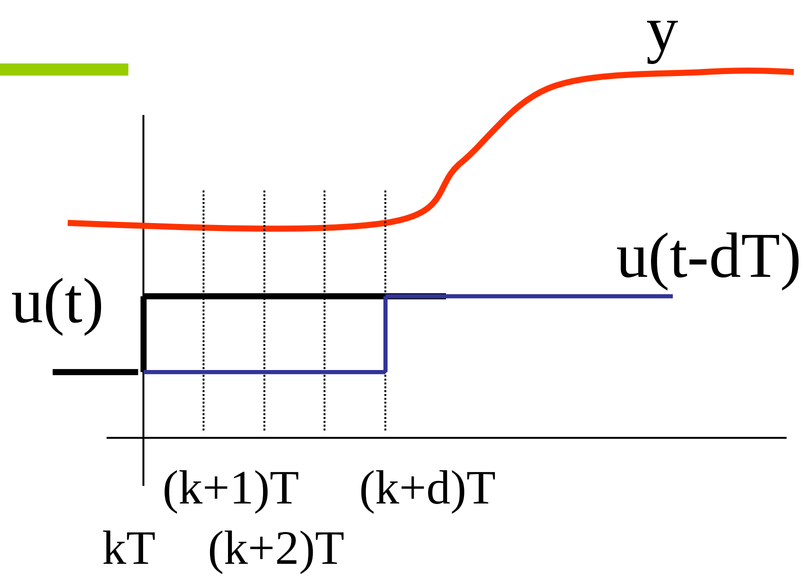
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\,x(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t+\tau) &= Cx(t) \end{aligned}}$$

Modelo con retardo a la salida

Retardos

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t - dT)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

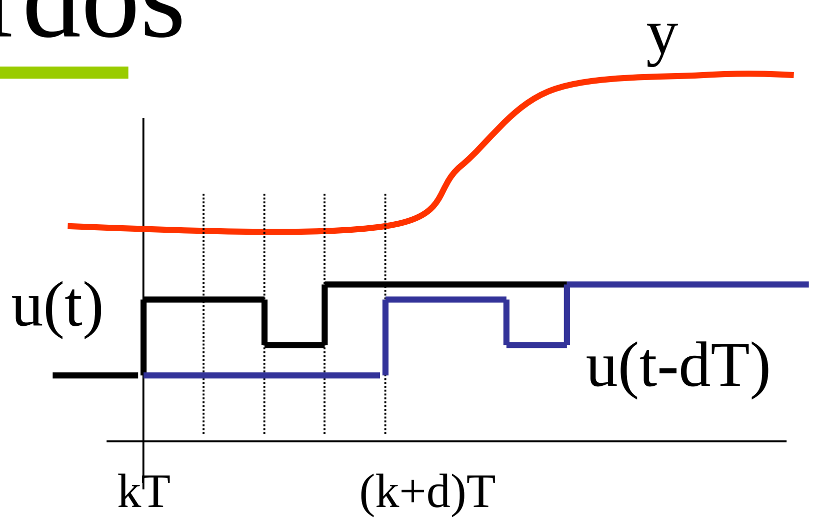


Caso en que el retardo dT es un multiplo, del periodo de muestreo T

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma - dT)d\sigma$$

Retardos

Caso en que el retardo dT es un multiplo, del periodo de muestreo T



$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma - dT)d\sigma$$

$$(k+1)T - \sigma = \tau, \quad -d\sigma = d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A\tau}d\sigma\ Bu((k-d)T)$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u((k-d)T)$$

Notación

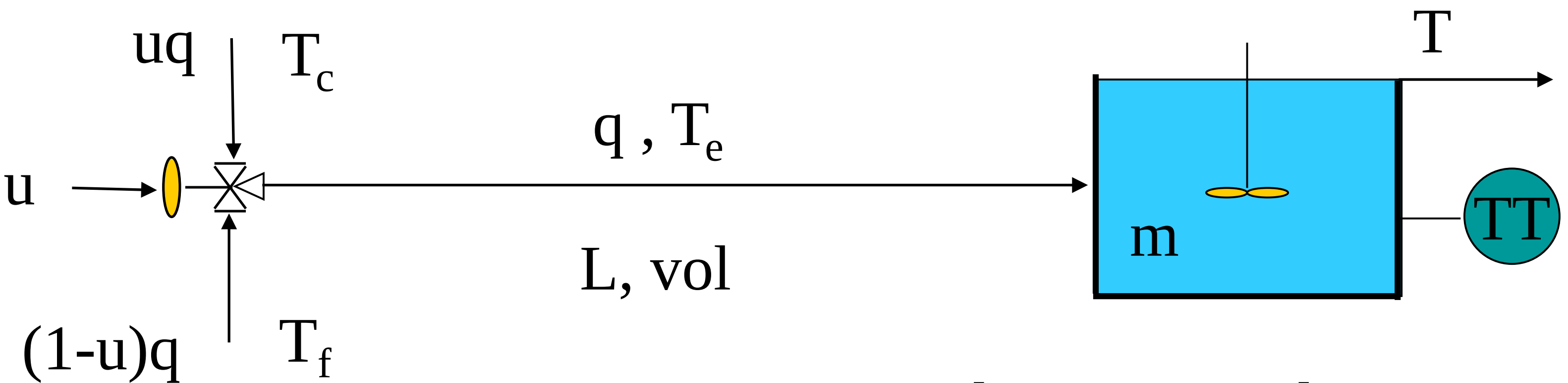
$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT)$$
$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$

Por simplicidad:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

k se refiere al primer, segundo, tercer, etc. periodo de muestreo

Ejemplo: Mezcla



Para q=4 l/min, V=10 l, T_c=60ºC, T_f=10ºC, vol=4 l, periodo = 0.5 min.

$$\frac{d\,\Delta T(t)}{dt} = -\frac{q}{V}\Delta T(t) + \frac{q(T_c - T_f)}{V}\Delta u(t-\tau) \qquad \tau = \frac{4}{4} = 1\,\text{min}$$

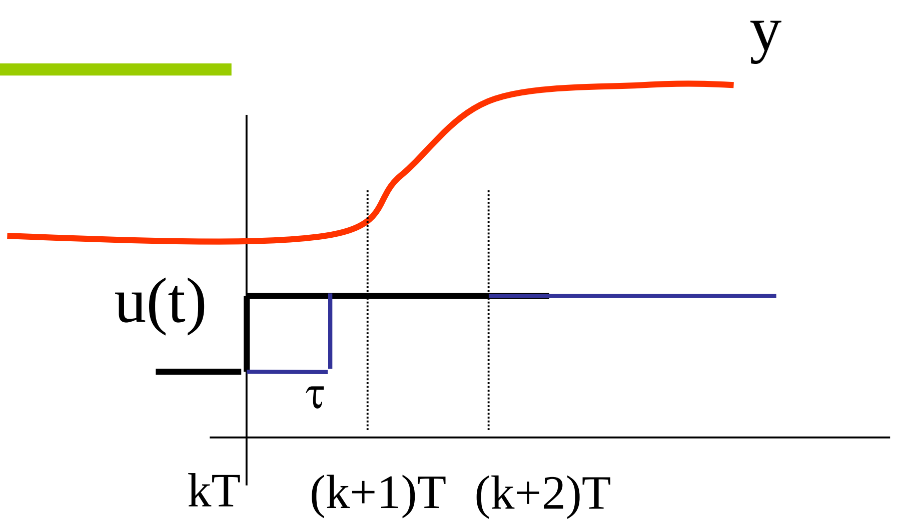
$$\Phi = e^{AT} = e^{-\frac{4}{20}0.5} = 0.905 \qquad \Gamma = \int_0^{0.5} e^{-\frac{4}{20}\tau} d\tau \frac{4}{20}(60-10) = 4.75$$

$$T(k+1) = 0.905T(k) + 4.75u(k-2)$$

Retardo no múltipo de T

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t - dT)$$

$$y(t) = Cx(t)$$



$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}Bu(\sigma - \tau)d\sigma =$$

$$= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma\ Bu((k-1)T) +$$

$$+ \int_{kT+\tau}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma\ Bu(kT)$$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma\, Bu((k-1)T) +$$

$$+ \int_{kT+\tau}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\sigma)}d\sigma\, Bu(kT)$$

cambios de variable : $\zeta = kT + \tau - \sigma, \qquad \xi = (k+1)T - \sigma, \qquad d\xi = -d\sigma$

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(T-\tau)}\int_{0}^{\tau} e^{A\zeta}d\zeta\, Bu((k-1)T) + \int_{0}^{T-\tau} e^{A\xi}d\xi\, Bu(kT)$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma_1 u((k-1)T) + \Gamma_0 u(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \quad \Gamma_0 = \int_{0}^{T-\tau} e^{A\xi}d\xi\, B \quad \Gamma_1 = e^{A(T-\tau)}\int_{0}^{\tau} e^{A\zeta}d\zeta\, B$$

$$\begin{bmatrix} x((k+1)T) \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ I \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix}$$

Formato estandar

Modelo de variables de estado

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

El modelo no es único: Existen múltiples modelos equivalentes entrada-salida

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ F & G \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ H \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

La de menor dimensión se denomina realización mínima

Representaciones equivalentes

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}}$$

$$z(k) = Px(k) \qquad P \text{ invertible}$$

$$x(k) = P^{-1} z(k)$$

$$z(k+1) = Px(k+1) = P\Phi x(k) + P\Gamma u(k) =$$

$$= P\Phi P^{-1} z(k) + P\Gamma u(k)$$

$$y(k) = CP^{-1} z(k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} z(k+1) &= \left[P\Phi P^{-1}\right] z(k) + \left[P\Gamma\right] u(k) \\ y(k) &= \left[CP^{-1}\right] z(k) \end{aligned}}$$

Propiedades

La ecuación característica det[λI-A] = 0 es invariante en una representación equivalente

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z(k+1) &= \left[P\Phi P^{-1}\right]z(k) + \left[P\Gamma\right]u(k) \\ y(k) &= \left[CP^{-1}\right]z(k) \end{aligned}}$$

$$\det\left|\lambda I - P\Phi P^{-1}\right| = \det\left|\lambda PP^{-1} - P\Phi P^{-1}\right| = \det\left|P\lambda P^{-1} - P\Phi P^{-1}\right| =$$

$$= \det\left|P(\lambda I - \Phi)P^{-1}\right| = \det\left|P\right|\det\left|\lambda I - \Phi\right|\det\left|P^{-1}\right| = \det\left|\lambda I - \Phi\right|$$

Respuesta temporal

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Condiciones iniciales: x(0)

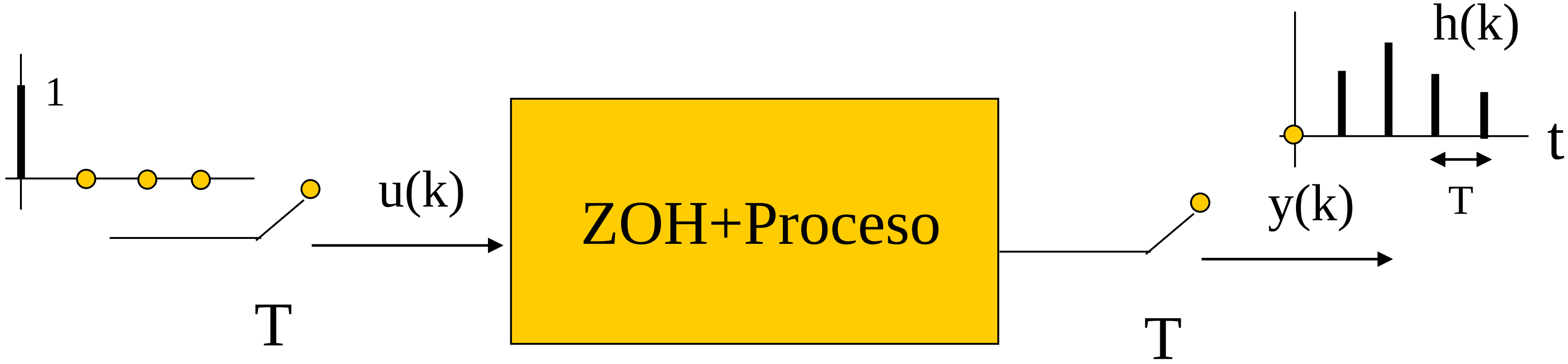
$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$
$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi\left[\Phi x(0) + \Gamma u(0)\right] + \Gamma u(1) =$$
$$= \Phi^2 x(0) + \Phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$
$$x(3) = \Phi x(2) + \Gamma u(2) = \Phi\left[\Phi^2 x(0) + \Phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)\right] + \Gamma u(2) =$$
$$= \Phi^3 x(0) + \Phi^2\Gamma u(0) + \Phi\Gamma u(1) + \Gamma u(2)$$

....

$$x(k) = \Phi^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Gamma u(i) \qquad y(k) = C\Phi^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C\Phi^{k-i-1}\Gamma u(i)$$

Respuesta impulsional pulsada

$$y(k) = C\Phi^{k}x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C\Phi^{k-i-1}\Gamma u(i)$$



Impulso unitario en t = 0

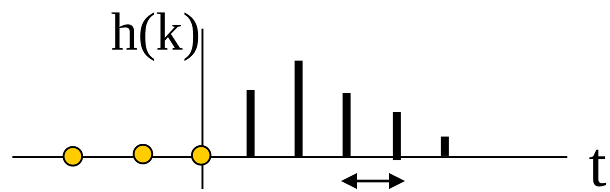
Respuesta partiendo de condiciones iniciales nulas

$$y(k) = C\Phi^{k}x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C\Phi^{k-i-1}\Gamma u(i) = C\Phi^{k-1}\Gamma = h(k)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i)$$

Modelo de respuesta impulsional

Modelo respuesta impulso



$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i) =$$

$$= h(k)u(0) + h(k-1)u(1) + \ldots + h(2)u(k-2) + h(1)u(k-1) =$$

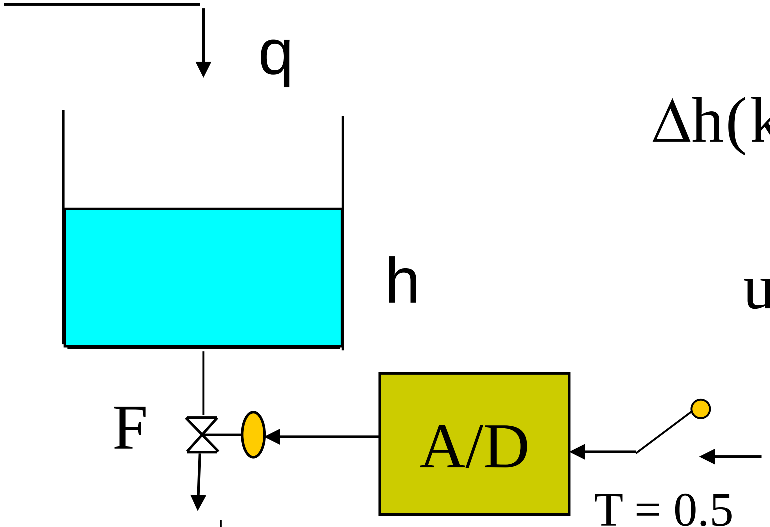
$$= \sum_{j=1}^{k} h(j)u(k-j)$$

Como $h(i) = 0$ para $i \leq 0$ y para condiciones inociales nulas: $u(i) = 0$ para $i < 0$:

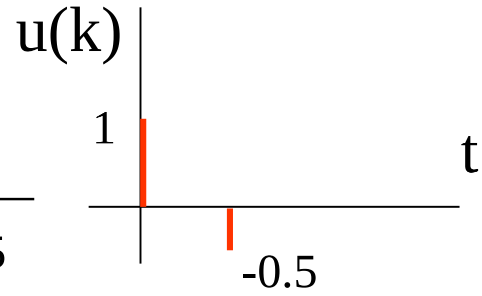
$$\boxed{y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(k-i)u(i) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)u(k-j)}$$

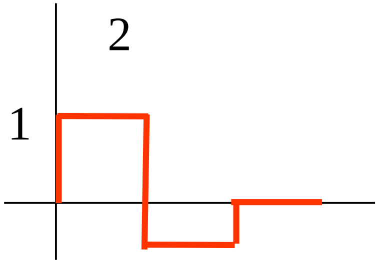
La salida es una combinación lineal de valores pasados de la entrada

Ejemplo: Depósito



$$\Delta h(k+1) = 0.535\Delta h(k) - 0.062\Delta u(k)$$





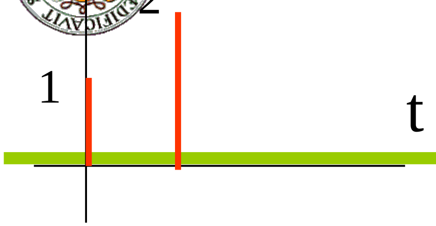
$$h(k) = C\Phi^{k-1}\Gamma = 1\ 0.535^{k-1}\ (-0.062)$$

$$u(0) = 1 \quad u(1) = -0.5 \quad u(3) = 0, \ldots.$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i) = h(k) - 0.5h(k-1) =$$

$$-0.062\ 0.535^{k-1} + 0.031\ 0.535^{k-2}$$

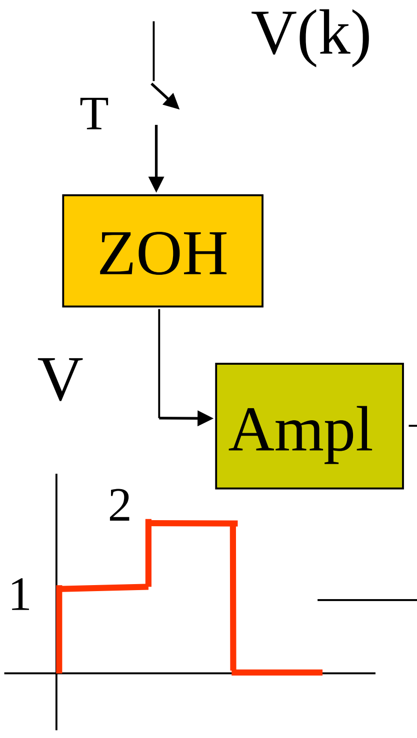
Ejemplo: Motor

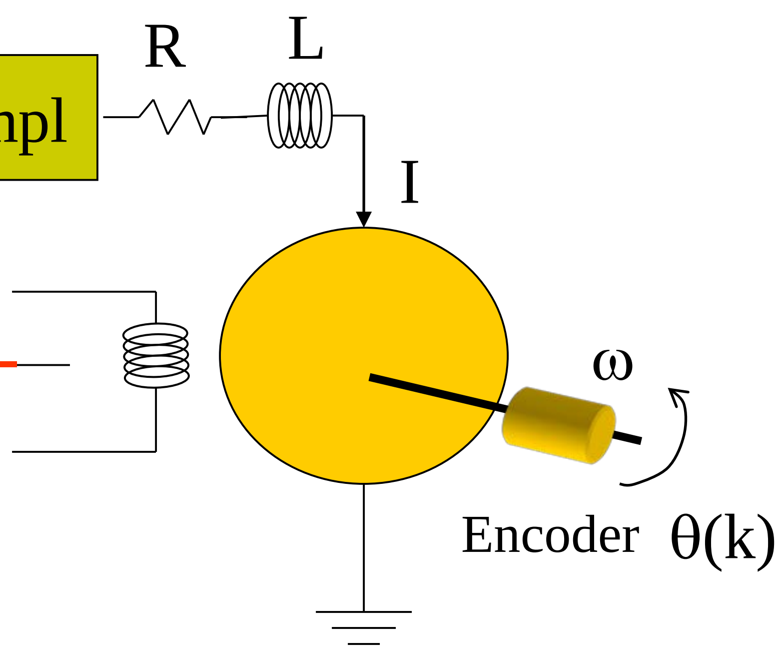


$$\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \omega(k+1)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}V(k)$$

$$[\theta(k)] = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

$T = 0.1sg$





Calcular la respuesta temporal en posición, desde el reposo, a los dos pulsos de tensión de entrada

Ejemplo: Motor

$$\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \omega(k+1)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}V(k)$$

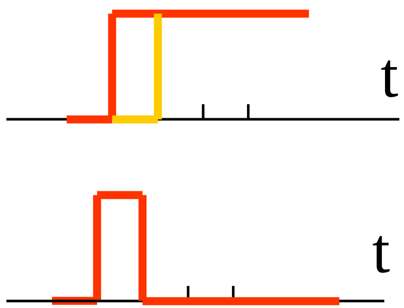
$$[\theta(k)] = (1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

$$h(k) = C\Phi^{k-1}\Gamma = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}$$

$$u(0) = 1 \quad u(1) = 2 \quad u(3) = 0, \ldots.$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i) = h(k) + 2h(k-1)$$

Respuesta salto



Impulso = diferencia de dos saltos retrasados un periodo de muestreo T

$$h_j = g_j - g_{j-1}$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j u(t-j) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j - g_{j-1}) u(t-j) =$$

$$= g_1 u(t-1) - \cancel{g_0 u(t)} + g_2 u(t-2) - g_1 u(t-2) + g_3 u(t-3) - g_2 u(t-3) + \ldots.. =$$

$$= g_1 (u(t-1) - u(t-2)) + g_2 (u(t-2) - u(t-3)) + g_3 (u(t-3) - u(t-4)) + \ldots. =$$

$$= g_1 \Delta u(t-1) + g_2 \Delta u(t-2) + g_3 \Delta u(t-3) + \ldots.. = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(t-j)$$

Modelo de respuesta salto

$$\boxed{y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(t-j)}$$

La salida es una combinación lineal de cambios de valores pasados de la entrada

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

Operador desplazamiento q^{-1}

$$q^{-1}z(k) = z(k-1) \qquad qz(k) = z(k+1)$$

$$x(k+1) = qx(k) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$[qI - \Phi]x(k) = \Gamma u(k)$$

$$x(k) = [qI - \Phi]^{-1}\Gamma u(k)$$

$$y(k) = C[qI - \Phi]^{-1}\Gamma u(k)$$

$$\boxed{\frac{y(k)}{u(k)} = C[qI - \Phi]^{-1}\Gamma = \frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \ldots + b_{m-1}q^1 + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}q^1 + a_n}}$$

Función racional de q

Función de tranferencia pulsada

$$y(k) = C\left[qI - \Phi\right]^{-1}\Gamma u(k) = \frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \ldots + b_{m-1} q^1 + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q^1 + a_n} u(k) =$$

$$= \frac{q^{-n}[b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \ldots + b_{m-1} q^1 + b_m]}{q^{-n}[q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q^1 + a_n]} u(k) =$$

$$= \frac{q^{-(n-m)}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{m-1} q^{-m+1} + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n-1} q^{-n+1} + a_n q^{-n}} u(k)$$

$$d = n - m$$

$$\boxed{y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) = \frac{q^{-d}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{m-1} q^{-m+1} + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n-1} q^{-n+1} + a_n q^{-n}} u(k)}$$

Función de transferencia pulsada

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) = \frac{q^{-d}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n}}u(k)$$

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k)$$

$$(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} \ldots + a_n q^{-n})y(k) = q^{-d}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m})u(k)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) =$$

$$b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \ldots + b_m u(k-d-m)$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots - a_n y(k-n) +$$

$$+ b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \ldots + b_m u(k-d-m)$$

La salida es una combinación lineal de valores pasados de la salida y de la entrada al proceso

Polos y Autovalores

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) = C\left[qI - \Phi\right]^{-1} \Gamma u(k) =$$

$$= C \frac{\mathrm{adj}\left[qI - \Phi\right]}{\det\left[qI - \Phi\right]} \Gamma u(k)$$

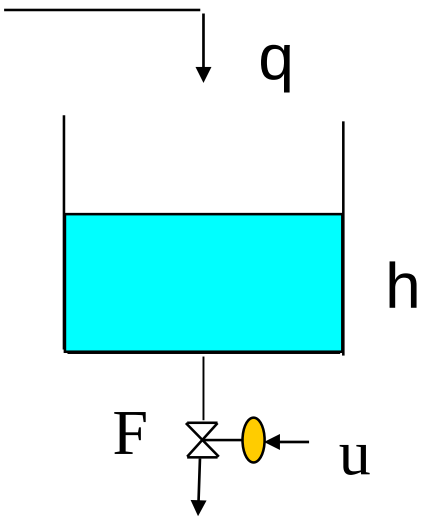
polos de $\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ son las raices de $\det\left[qI - \Phi\right] = 0$

o sea los autovalores de Φ

Puede haber mas autovalores que polos en una realización no mínima por cancelación ceros-polos

$$\frac{\cancel{(q - 0.2)}(q - 0.7)}{\cancel{(q - 0.2)}(q - 0.5)(q - 0.1)}$$

Ejemplo: Depósito



$$\Delta h((k+1)0.5) = 0.535\Delta h(k0.5) - 0.062\Delta u(k0.5)$$

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) = C\left[qI - \Phi\right]^{-1}\Gamma u(k) =$$

$$= 1\left[q - 0.535\right]^{-1}(-0.062)u(k) =$$

$$= \frac{-0.062}{q-0.535}u(k) = \frac{-0.062q^{-1}}{1-0.535q^{-1}}u(k)$$

T = 0.5

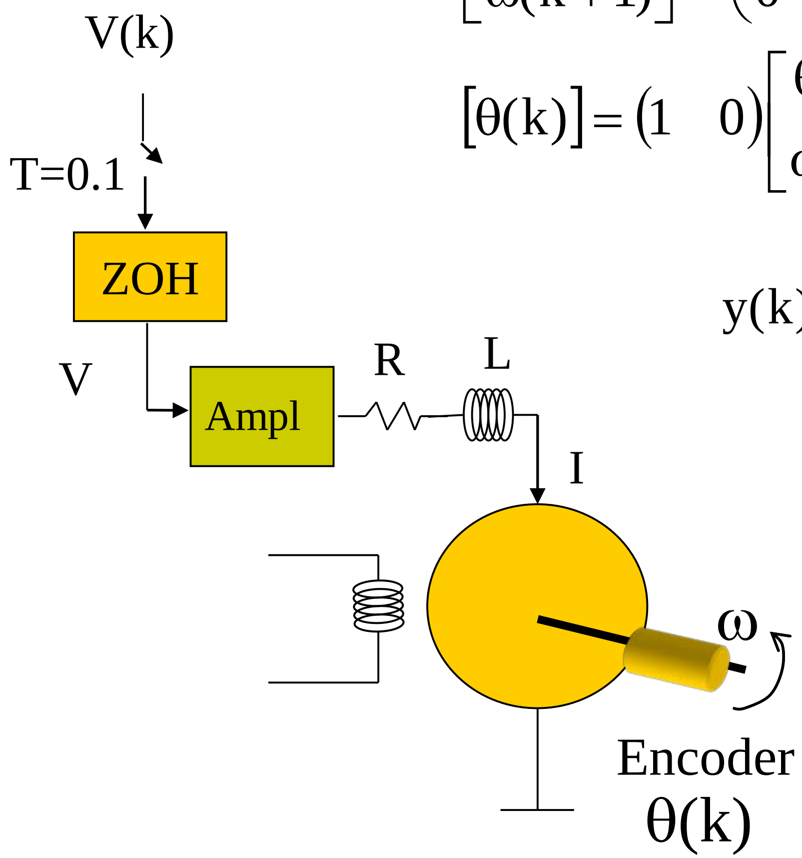
Polo = Autovalor = 0.535

Ejemplo: Motor

$$\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \omega(k+1)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}V(k)$$

$$[\theta(k)]=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

Autovalores: 1 , 0.6



$$y(k)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)=C[qI-\Phi]^{-1}\Gamma u(k)=$$

$$=(1 \quad 0)\left[\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}u(k)=$$

$$=\frac{2.123q+1.792}{q^2-1.6q+0.6}u(k)=\frac{2.123q^{-1}+1.792q^{-2}}{1-1.6q^{-1}+0.6q^{-2}}u(k)$$

Polos $q^2 - 1.6q + 0.6 = 0$

$q = 1, 0.6$

Realización de FT

Dada la función de transferencia:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) = \frac{q^{-d}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{m-1}q^{-m+1} + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n-1}q^{-n+1} + a_n q^{-n}}u(k)$$

Encontrar un modelo en variables de estado que sea equivalente entrada - salida

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Forma canonica observable

$$y(k)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)=\frac{q^{-d}(b_0+b_1q^{-1}+\ldots+b_{m-1}q^{-m+1}+b_mq^{-m})}{1+a_1q^{-1}+\ldots+a_{n-1}q^{-n+1}+a_nq^{-n}}u(k)$$

$$z(k+1)=\left(\begin{array}{c|cccc} -a_1 & & & & \\ -a_2 & & & I & \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & & & & \\ \hline -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)z(k)+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}z(k)$$

Los b_j para $j < d$ se consideran nulos

Forma canonica controlable

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) = \frac{q^{-d}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{m-1}q^{-m+1} + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n-1}q^{-n+1} + a_n q^{-n}}u(k)$$

$$z(k+1) = \left(\begin{array}{cccc|c} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ \hline & & & & 0 \\ & I & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right) z(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} z(k)$$

Los b_j para $j < d$ se consideran nulos

Ejemplo: Motor

$$z(k+1)=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\ & & & & 0\\ & I & & & 0\\ & & & & \vdots\\ & & & & 0\end{pmatrix}z(k)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\end{pmatrix}z(k)$$

$$y(k)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)=\frac{2.123q^{-1}+1.792q^{-2}}{1-1.6q^{-1}+0.6q^{-2}}u(k)$$

$$z(k+1)=\begin{pmatrix}1.6 & -0.6\\ 1 & 0\end{pmatrix}z(k)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}V(k)$$

$$\theta(k)=\begin{pmatrix}2.123 & 1.792\end{pmatrix}z(k)$$

Autovalores:

$$\det[\lambda I-\Phi]=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.6 & -0.6\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1.6 & 0.6\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\lambda^2-1.6\lambda+0.6=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=1,\,0.6$$

Polos:

$$q^2-1.6q+0.6=0$$

$$q=1,\,0.6$$

Observabilidad

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Es observable si a partir de medidas de la entrada y la salida en N instantes de tiempo se puede calcular el estado inicial x(0)

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = Cx(1) = C\Phi x(0) + C\Gamma u(0)$$

$$y(2) = Cx(2) = C\Phi x(1) + C\Gamma u(1) = C\Phi[\Phi x(0) + \Gamma u(0)] + C\Gamma u(1) =$$

$$= C\Phi^2 x(0) + C\Phi\Gamma u(0) + C\Gamma u(1)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y(N-1) = Cx(N-1) =$$

$$= C\Phi^{N-1}x(0) + C\Phi^{N-2}\Gamma u(0) + \ldots + C\Phi\Gamma u(N-1) + C\Gamma u(N-2)$$

Observabilidad

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{N-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ C\Gamma u(0) \\ \vdots \\ C\Phi^{N-2}u(0) + \ldots + C\Gamma u(N-2) \end{bmatrix}$$

La condición de existencia de solución para este sistema en las n componentes de x(0) es:

$$\boxed{\text{rango}\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} = n}$$

Matriz de observabilidad

Ejemplo

$$\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \omega(k+1)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}V(k)$$

$$[\theta(k)] = (1 \quad 0)\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

Motor CC

¿Es observable?

$$\text{rango}\begin{bmatrix}C\\ C\Phi\\ C\Phi^2\\ \vdots\\ C\Phi^{n-1}\end{bmatrix} = 2\,? \qquad \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0.078\end{bmatrix} = 2$$

Observable con 2 medidas

Controlabilidad

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Es controlable si existe una secuencia finita de controles u(0), u(1),...,u(N) capaz de hacer evolucionar el sistema desde cualquier estado inicial x(0) a cualquier x(N)

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$
$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi\left[\Phi x(0) + \Gamma u(0)\right] + \Gamma u(1) =$$
$$= \Phi^2 x(0) + \Phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

....

$$x(N) = \Phi^N x(0) + \Phi^{N-1}\Gamma u(0) + \ldots + \Phi\Gamma u(N-2) + \Gamma u(N-1)$$

Controlabilidad

$$x(N) = \Phi^N x(0) + \Phi^{N-1}\Gamma u(0) + \ldots + \Phi\Gamma u(N-2) + \Gamma u(N-1)$$

$$x(N) = \Phi^N x(0) + \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{N-1}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

(N x 1)

(n x N)

(n x 1)

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{N-1}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = x(N) - \Phi^N x(0)$$

n ecuaciones y N incognitas, para que tenga solución:

$$\boxed{\text{rango} \quad \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} = n}$$

Condición de controlabilidad

Ejemplo

$$\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \omega(k+1)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.078\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}2.123\\ 39.154\end{pmatrix}V(k)$$

$$[\theta(k)]=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}$$

Motor CC

¿Es controlable?

$$\text{rango}\begin{bmatrix}\Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma\end{bmatrix}=2\,? \qquad \text{rango}\begin{bmatrix}2.123 & 5.177\\ 39.154 & 23.492\end{bmatrix}=2$$

Controlable con 2 acciones de control

Realización mínima

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT)$$

Una realización que es completamente observable y completamente controlable se denomina realización mínima y corresponde a aquella realización equivalente entrada-salida de menor dimensión del estado

$t \leftrightarrow kT$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$

?

Dado un modelo lineal discreto no siempre puede encontrarse un sistema lineal continuo equivalente, o puede que haya muchas soluciones. Procedimiento: resolver

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$