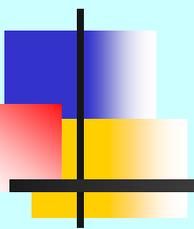
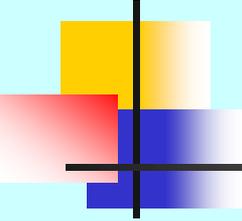


Métodos de Identificación con Subespacios



Prof. Cesar de Prada
Dpt. Ingeniería de Sistemas y
Automática
Universidad de Valladolid



Indice

- Introducción
- Definiciones
- Métodos básicos
 - MOESP
 - N4SID
- HIDDEN, ejemplos
- Métodos en lazo cerrado
- Ejemplos

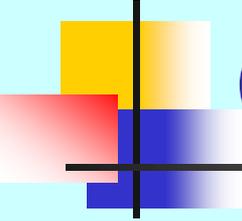
Identificación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

Ventaja: Permite tener en cuenta el carácter multivariable del sistema



Objetivos: estimar el orden n del modelo
estimar los parámetros (A, B, C, D)
estimar los ruidos $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} y el estado \mathbf{x}



Caso de estado x conocido

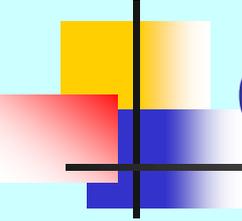
$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

Si $\mathbf{x}(t)$ conocido, las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ pueden estimarse usando LS, OE, PEM, etc. Los ruidos se calculan como residuos.



Caso mas frecuente: x desconocido

Suele implicar que el orden del modelo es desconocido

Diversos enfoques:

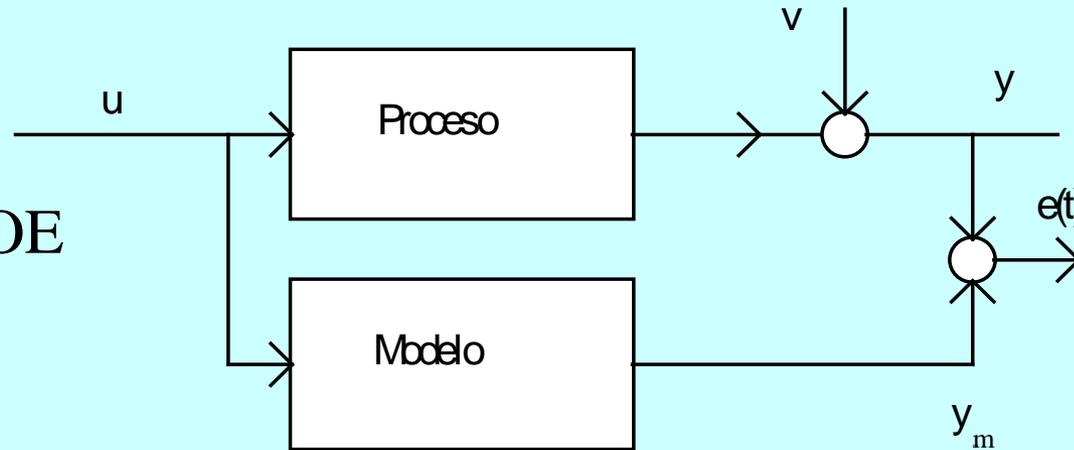
- ✓ Métodos de subespacios
- ✓ Métodos directos: Se puede usar una estructura de tipo independiente para calcular la salida del modelo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_m(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

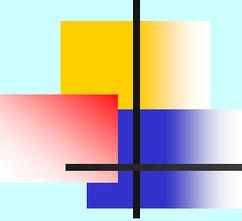
Identificación directa tipo OE

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_m(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ y_m(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

En teoría puede usarse un algoritmo tipo OE para estimar A,B,C,D



Principales dificultades: orden desconocido y sobreparametrización del modelo



Dificultades: Orden del modelo

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

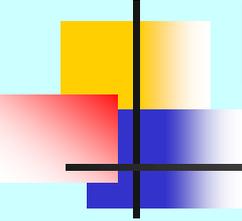
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

El orden del modelo puede aumentarse arbitrariamente manteniéndose la misma relación entrada-salida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{s}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Realización mínima : controlable y observable



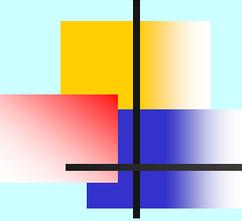
Realizaciones equivalentes

Para cualquier T invertible, si $\mathbf{z} = T \mathbf{x}$ $\mathbf{x} = T^{-1} \mathbf{z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) & T\mathbf{x}(t+1) &= TA T^{-1}\mathbf{z}(t) + TB\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) & \mathbf{y}(t) &= C T^{-1}\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+1) &= [TA T^{-1}] \mathbf{z}(t) + [TB] \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [C T^{-1}] \mathbf{z}(t) + [D] \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

$[TA T^{-1}, TB, C T^{-1}, D] = [A_T, B_T, C_T, D_T]$
es una representación equivalente desde el punto
de
vista entrada-salida

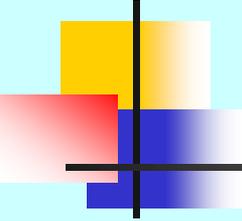


Realizaciones equivalentes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \mathbf{z}(t+1) &= [\mathbf{T}\mathbf{A} \ \mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(t) + [\mathbf{T}\mathbf{B}] \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) & \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C} \ \mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(t) + [\mathbf{D}] \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Partiendo de datos entrada-salida, solo podemos aspirar a obtener una representación equivalente.

Este concepto es básico en los métodos de subespacios



Métodos de subespacios

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

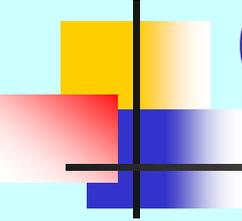
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Ordenes:

n, m, l

Orientados a un contexto multivariable con modelos en espacio de estados

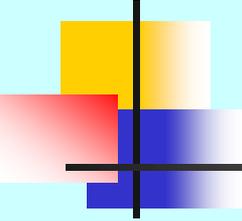
- ✓ Basados en el uso de propiedades algebraicas
- ✓ Permiten estimar el orden de una realización mínima y los parámetros de una representación equivalente
- ✓ Existen diversos métodos con un fondo común



Orígenes SMI

MOESP, Delf , Holanda

- The output error state space model identification class of algorithms
M Verhaegen, P. Dewilde, IJC, vol.56,n.5, 1992
- Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models given in Innovations Form from I/O Data
M. Verhaegen, Automática, Vol3, no.1, 1994
- N4SID, Catholic University of Leuven, Bélgica
Peter Van Overschee y Bart de Moor, 1994.
- Closed loop
 - Closed loop identification of state space models using subspace techniques
H. Jha, C. Georgakis, ADCHEM 97, Banff, 1997



Datos

Los datos experimentales se organizan como matrices Hankel :

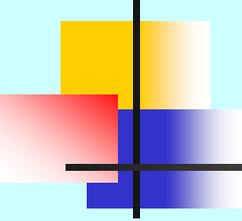
y_t , u_t vectores de salida / entrada en el instante t

$N+i-1 =$ número de datos

$i >$ orden del sistema

$$Y_{i,N} = \begin{bmatrix} y_t & y_{t+1} & \cdots & y_{t+N-1} \\ y_{t+1} & y_{t+2} & \cdots & y_{t+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t+i-1} & y_{t+i} & \cdots & y_{t+N+i-2} \end{bmatrix} (li, N)$$

$$U_{i,N} = \begin{bmatrix} u_t & u_{t+1} & \cdots & u_{t+N-1} \\ u_{t+1} & u_{t+2} & \cdots & u_{t+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{t+i-1} & u_{t+i} & \cdots & u_{t+N+i-2} \end{bmatrix} (mi, N)$$



Representación básica

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1)$$

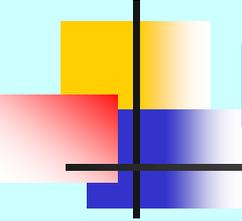
$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t+2) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t+2) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t+1) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+2) = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+2)\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t+3) = \dots\dots$$

Representación básica

$$\begin{bmatrix} y_t & y_{t+1} & \cdots & y_{t+N-1} \\ y_{t+1} & y_{t+2} & \cdots & y_{t+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t+i-1} & y_{t+i} & \cdots & y_{t+N+i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t & x_{t+1} & \cdots & x_{t+N-1} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t & u_{t+1} & \cdots & u_{t+N-1} \\ u_{t+1} & u_{t+2} & \cdots & u_{t+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{t+i-1} & u_{t+i} & \cdots & u_{t+N+i-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{i,N} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_{t,N} + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_{i,N} \quad i > n$$



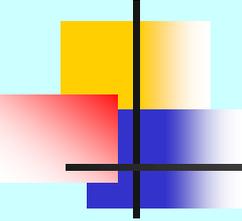
Matrices

Matriz de observabilidad extendida

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}$$

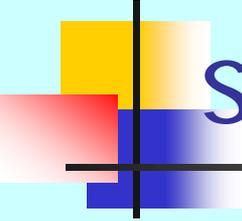
Matriz Toeplitz de coeficientes de Markov coefficients (respuesta impulso)

$$H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & \dots & D \end{bmatrix}$$



Definiciones

- Descomposición en valores singulares
- Descomposición RQ
- Rango
- Subespacio columna
- Matrices invariantes a un desplazamiento
- Proyecciones



Descomposición en valores singulares SVD

Dada una matriz A (m , n) su SVD es:

$$A = U S V^*$$

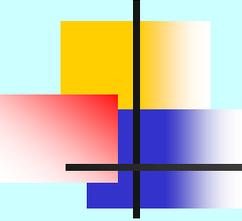
donde

S es una matriz diagonal matrix con los valores singulares de A colocados en la diagonal principal en orden decreciente

U , V son matrices unitarias ortogonales

$$U (m, m) \quad S (m, n) \quad V (n, n)$$

Matlab `svd(A)`



Descomposición SVD

$$A = USV^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \dots \\ \mathbf{v}_n^* \end{bmatrix}$$

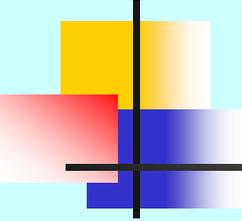
σ_i valores singulares $= +\sqrt{\lambda_i(A^T A)}$

$U(m \times m)$, $V(n \times n)$ matrices ortonormales unitarias

$$U^{-1} = U^* \quad V^{-1} = V^*$$

$$\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \quad \|\mathbf{u}_i\|_2 = 1 \quad \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad \|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$$

Si $\text{rango}(A) = n$, debe haber n valores singulares > 0



Factorización RQ

RQ Factorization

$$A = R Q \quad A$$

(m , n)

R (m , n) matriz triangular inferior

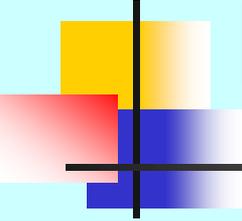
Q (n , n) matriz ortogonal $Q^{-1} = Q'$

Factorización reducida:

$$R (m , m) \quad Q (m , n) \quad Q Q' = I (m , m)$$

Matlab: QR Orthogonal-triangular decomposition.

[Q,R] = QR(A) produces an **upper** triangular matrix R of the same dimension as A, and a unitary matrix Q so that $A = Q^*R$.



Factorización de datos RQ

Factorización RQ de la matriz de datos U,Y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,N} \\ \dots \\ \mathbf{Y}_{i,N} \end{bmatrix}_{(mi+li,N)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{R}_{21} & \vdots & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix}_{(mi+li,mi+li)} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \dots \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}_{(mi+li,N)}$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}' = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}'_1 = \mathbf{I} (mi,mi)$$

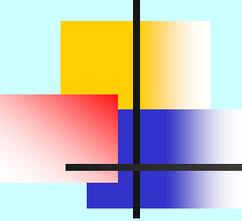
$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}'_2 = \mathbf{0} (mi,li)$$

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}'_1 = \mathbf{0} (li,mi)$$

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}'_2 = \mathbf{I} (li,li)$$

$$\mathbf{R}_{11} (mi,mi)$$

$$\mathbf{R}_{22} (li,li)$$



Definiciones

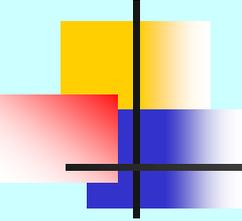
A secuencia de N vectores u_k ($m, 1$) es persistentemente excitada de orden i si

$$\text{rank}(U_{i,N}) = m \quad i$$

Rango de A: número de líneas linealmente independientes

Desigualdad de Sylvester

$$\text{rango}(A) + \text{rango}(B) - n \leq \text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango}(A), \text{rango}(B)\}$$



Definiciones

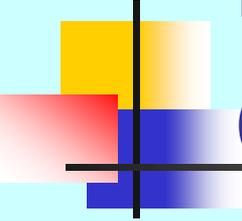
Dadas A y B (N, m) $m < N$

B pertenece al **subespacio columna de A** si existe T (m, m) tal que

$$B = AT$$

$$\begin{bmatrix} \dots & b_{j1} & \dots \\ \dots & b_{j2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{jN} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \vdots & \mathbf{A}_2 \vdots & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & t_{j1} & \dots \\ \dots & t_{j2} & \dots \\ \dots & t_{j3} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_j = \sum t_{ji} \mathbf{A}_i$$



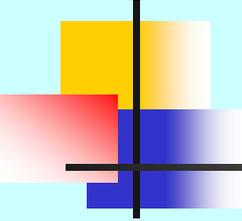
Matrices invariantes a un desplazamiento

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

F_n $F_n^{(1)}$ $F_n^{(2)}$

F_n es invariante a un desplazamiento si existe T tal que

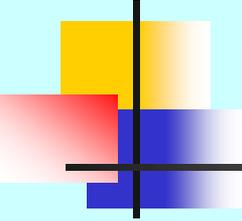
$$F_n^{(2)} = F_n^{(1)} T$$



Ejemplo

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-2} \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad \Gamma_i^{(1)} A = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} = \Gamma_i^{(2)}$$

Γ_i es invariante a un desplazamiento



Proyecciones

Dada cualquier matriz U , la matriz:

$$\Pi_U^\perp = I - U^T (UU^T)^{-1} U$$

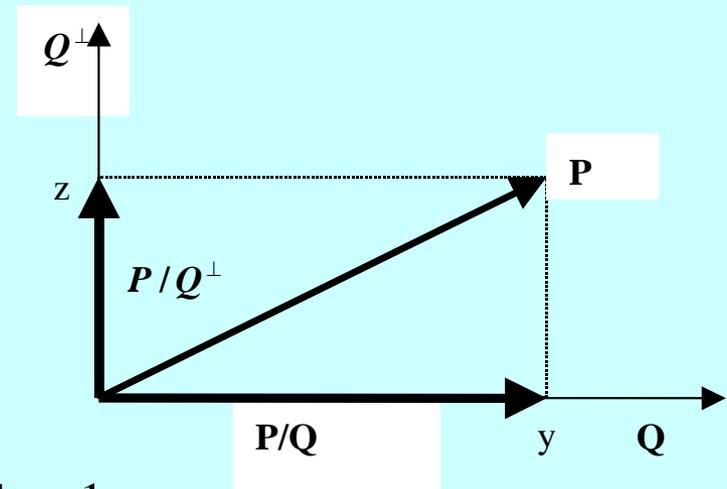
Es ortogonal a U (lleva a cabo una proyección ortogonal a U)

$$\begin{aligned} U\Pi_U^\perp &= U[I - U^T (UU^T)^{-1} U] = \\ &= U - UU^T (UU^T)^{-1} U = U - U = 0 \end{aligned}$$

Herramientas geométricas

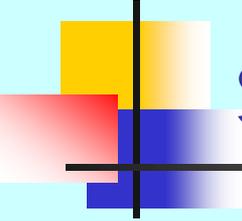
Considerando los elementos de una fila de una matriz como vectores

Proyección ortogonal de las filas de la matriz P sobre las filas de la matriz Q : P/Q



$$P/Q = P\Pi_Q = PQ^T(QQ^T)^{-1}Q$$

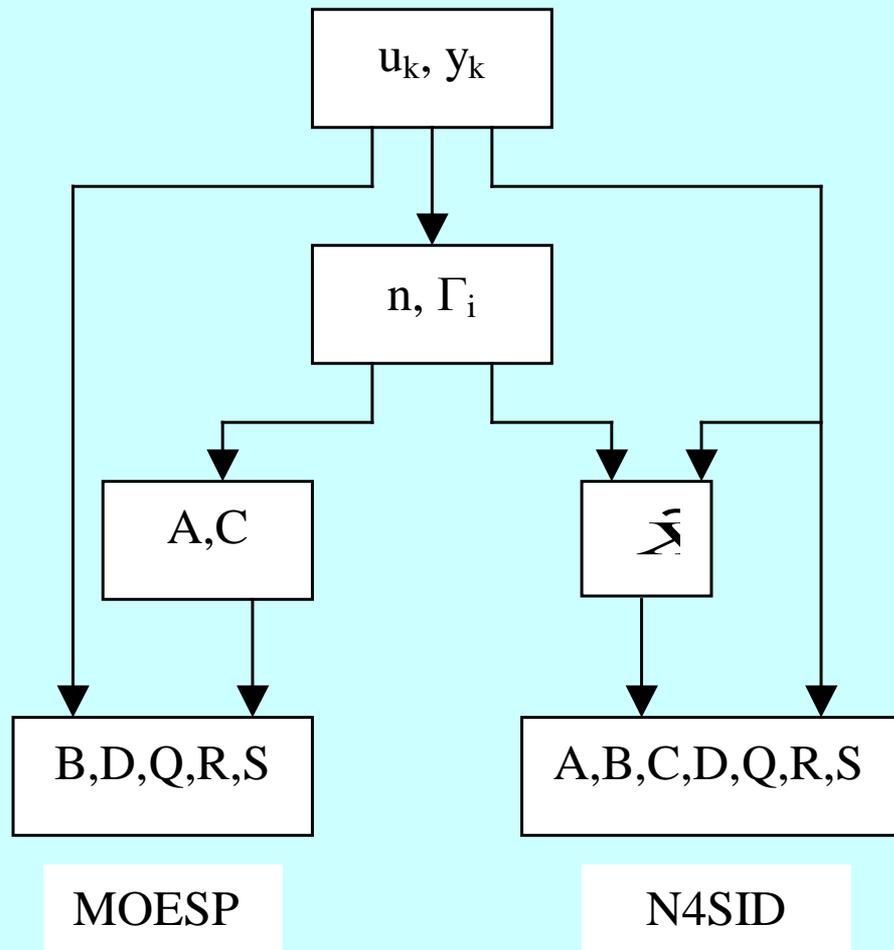
$$P/Q^\perp = P - PQ^T(QQ^T)^{-1}Q$$

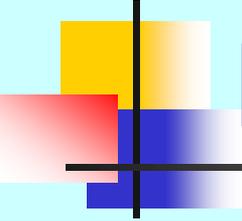


Métodos básicos de subespacios

- ✓ **Métodos de realización:** Los parámetros de Markov (respuesta impulso) se suponen conocidos
- ✓ **Métodos directos:** Primero se estiman n y Γ_i y luego:
 - ✓ MOESP: Estima C , A y luego B y D
 - ✓ N4SID: Estima x y luego A , B , C , D

Métodos directos





MOESP

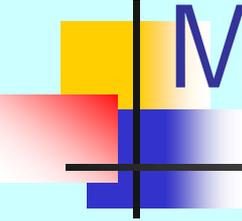
Multivariable **O**utput **E**rror **S**tate **S**pace Model
Identification

Ordinary MOESP:

Verhagen 1993, sin ruido

PO-MOESP: Past Outputs MOESP,

Verhagen 1994, con ruido



MOESP simple

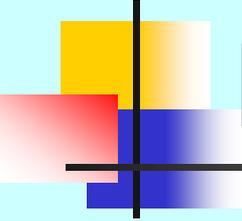
$$Y_{i,N} = \Gamma_i X_N + H_i U_{i,N}$$

Se utiliza la proyección ortogonal de U para cancelar este término

$$\Pi_U^\perp = I - U^T (U U^T)^{-1} U \quad U_{i,N} \Pi_U^\perp = 0$$

$$Y_{i,N} \Pi_U^\perp = \Gamma_i X_N \Pi_U^\perp + H_i U_{i,N} \Pi_U^\perp$$

$$Y_{i,N} \Pi_U^\perp = \Gamma_i X_N \Pi_U^\perp$$



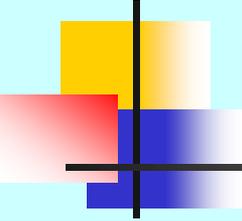
MOESP simple

$$Y_{i,N} \Pi_U^\perp = \Gamma_i X_N \Pi_U^\perp$$

$Y_{i,N} \Pi_U^\perp$ pertenece al subespacio columna de Γ_i

Dos pasos:

- ✓ Estimar el orden n del modelo
- ✓ Estimar C y A a partir de las propiedades de invarianza a un desplazamiento de Γ_i



Rangos

Rango de X_N es n

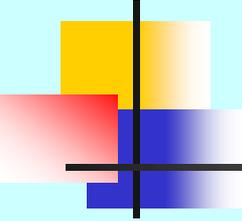
Si la entrada es persistentemente excitada: rango de $U_{i,N}$ es m_i

si i es suficientemente grande, $\text{rango}(X_N \Pi_{U^\perp}) = n$

En una realización mínima: $\text{rango}(\Gamma_i) = n$

Por tanto: $\text{rango}(Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = \Gamma_i X_N \Pi_{U^\perp}) = n$

y la SVD de $Y_{i,N} \Pi_{U^\perp}$ debe tener n valores singulares diferentes de cero y el resto igual a cero

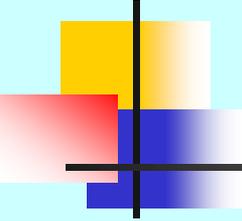


Estimación de n por SVD

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_n^T \end{bmatrix}$$

En la practica, varios valores singulares serán proximos a cero pero distintos de cero y n debe estimarse por inspección de los mismos

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_n^T \end{bmatrix}$$



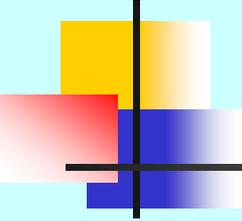
Elección de Γ_i

$$\mathbf{z}(t+1) = [\mathbf{TA} \ \mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(t) + [\mathbf{TB}] \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} \ \mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(t) + [\mathbf{D}] \mathbf{u}(t)$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{CT}^{-1} \\ \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{TAT}^{-1} \\ \dots \\ \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{TA}^{i-1}\mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \Gamma_i \mathbf{T}^{-1}$$

Podemos trabajar con cualquier matriz del subespacio de Γ_i

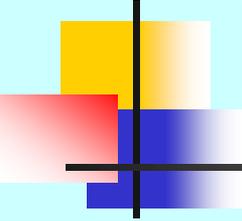


Estimación de Γ_i por SVD

$$\begin{aligned} Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} &= [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_n^T \end{bmatrix} = \\ &= [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n V_n^T \\ 0 \end{bmatrix} = U_n S_n V_n^T \end{aligned}$$

Existen varias alternativas para elegir Γ_i teniendo en cuenta que el objetivo final es escoger una matriz del tipo $\Gamma_i T^{-1}$

$$Y_{i,N} \Pi_U^\perp = \Gamma_i X_N \Pi_U^\perp \quad \hat{\Gamma}_i = U_n \quad \hat{\Gamma}_i = U_n S_n^{1/2}$$



Estimación de A_T

Una vez que conocemos una matriz U_n del subespacio columna de Γ_i

$$U_n = \Gamma_i T^{-1}$$

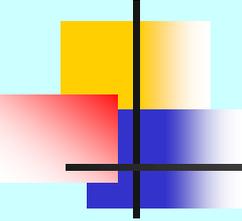
U_n es también invariante a un desplazamiento.

Prueba : como Γ_i es invariante a un desplz : $\Gamma_i^{(1)} A = \Gamma_i^{(2)}$

$$U_n^{(1)} A_T = \Gamma_i^{(1)} T^{-1} (T A T^{-1}) = \Gamma_i^{(1)} A T^{-1} = \Gamma_i^{(2)} T^{-1} = U_n^{(2)}$$

Además, si $\text{rango}(U_n^{(1)}) = n$, A_T puede calcularse a partir de :

$$U_n^{(1)} A_T = U_n^{(2)}$$



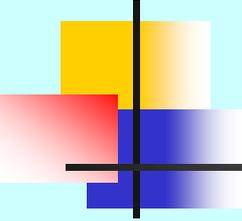
Estimación de A_T

$$U_n^{(1)} A_T = U_n^{(2)}$$

$$U_n^{(1)T} U_n^{(1)} A_T = U_n^{(1)T} U_n^{(2)}$$

$$A_T = \left[(U_n^{(1)T} U_n^{(1)})^{-1} U_n^{(1)T} \right] U_n^{(2)}$$

$$\left[(U_n^{(1)T} U_n^{(1)})^{-1} U_n^{(1)T} \right] = \left[U_n^{(1)} \right]^\dagger$$

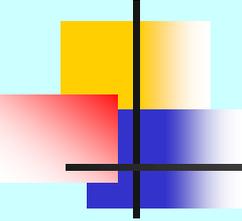


Estimación of C_T

$$U_n = \Gamma_i T^{-1}$$

$$U_n = \Gamma_i T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} CT^{-1} \\ CAT^{-1} \\ \dots \\ CA^{i-1}T^{-1} \end{bmatrix}$$

El primer bloque de U_n muestra $C_T = CT^{-1}$ directamente



Una alternativa usando RQ

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = \begin{bmatrix} U_n & U_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_n^T \end{bmatrix} \quad \hat{\Gamma}_i = U_n$$

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$(mi+li, N)$ $(mi+li, mi+li)$ $(mi+li, N)$

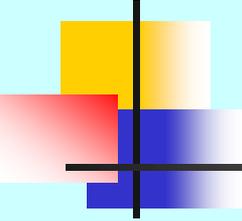
$$U = R_{11}Q_1$$

$$U^T = Q_1^T R_{11}^T$$

$$Y = [R_{21}Q_1 + R_{22}Q_2]$$

$$Q_1 \times Q_1^T = I$$

$$Q_2 \times Q_1^T = 0$$



Una alternativa usando RQ

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = Y - YU^T (UU^T)^{-1}U$$

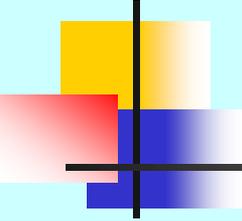
$$Y \Pi_{U^\perp} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} Q_1^T R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$Y \Pi_{U^\perp} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 Q_1^T \\ Q_2 Q_1^T \end{pmatrix} R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$Y \Pi_{U^\perp} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} R_{11}^T (R_{11} I R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = \begin{bmatrix} R_{21} Q_1 + R_{22} Q_2 \end{bmatrix} - R_{21} \cdot \begin{bmatrix} R_{11}^T (R_{11} R_{11}^T)^{-1} R_{11} \end{bmatrix} Q_1 = R_{22} Q_2$$

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = R_{22} Q_2$$



Decomposición de R_{22}

$$R_{22} = [U_n \quad U_0] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Gamma}_i = U_n = \begin{pmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ C_T A_T^2 \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-1} \end{pmatrix}$$

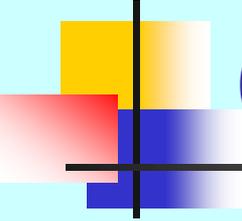
$$A_T = (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n$$

$$C_T = J_3 U_n$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_{(i-1)l} & 0 \\ & I_{(i-1)l \times l} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{(i-1)l} \\ I_{(i-1)l \times l} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{l \times (i-1)l} \end{pmatrix}$$



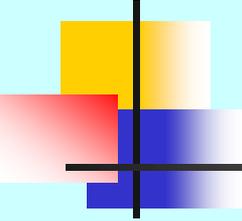
Operador q

$$q\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1) \quad q^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-1)$$

$$\begin{aligned} q\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [q\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= [q\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} [q\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



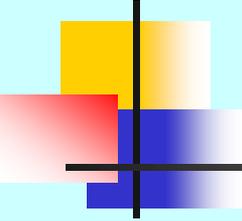
Estimación de B_T y D_T

Si A y C son conocidos, B y D pueden estimarse usando LS a partir de:

$$y(t) = C(qI - A)^{-1} B u(t) + D u(t) + v(t)$$

Puesto que aparecen en forma lineal. Para este fin puede usarse el predictor:

$$y_m(t) = \varphi(t) \begin{bmatrix} \text{vec}(B) \\ \text{vec}(D) \end{bmatrix} \quad v(t) \text{ ruido}$$



Estimación de B_T y D_T

$$y(t) = C(qI - A)^{-1} B u(t) + D u(t) + v(t)$$

$$y_m(t) = \varphi(t) \begin{bmatrix} \text{vec}(B) \\ \text{vec}(D) \end{bmatrix}$$

$\text{vec}(X)$ = vector
columna construido
superponiendo las
columnas de X

Columna i de $\varphi(t)$: $\varphi_i(t) = C(qI - A)^{-1} e_j u_k(t)$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i = (k-1)n + j$
corresponde al elemento $B_{j,k}$

B y D

D

$$U_0^T H_i = U_0^T R_{21} R_{11}^{-1}$$

$$U_0 \quad (li - n \times li)$$

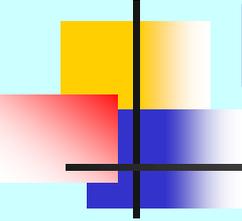
$$(U_0^T)U_n = 0$$

B_T

$$\Xi = U_0^T R_{21} R_{11}^{-1}$$

$$U_n^{(1)} = J_1 U_n$$

$$\begin{bmatrix} \Xi(:,1:m) \\ \Xi(:,m+1:2m) \\ \vdots \\ \Xi(:,m(i-1)+1:mi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0^T(:,1:l) & U_0^T(:,l+1:2l) & \cdots & U_0^T(:,l(i-1):li) \\ U_0^T(:,l+1:2l) & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ U_0^T(:,l(i-1):li) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & U_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B_T \end{bmatrix}$$



MOESP con ruido

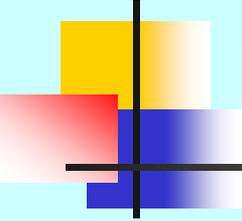
PO-MOESP

Si se consideran perturbaciones no medibles, aparece un término extra N en el modelo:

$$Y_{s,N} = \Gamma_s X_{i,N} + H_s U_{s,N} + N_{s,N}$$

Pasos:

- 1 Eliminar el término HU
- 2 Cancelar el término N
- 3 Estimar Γ



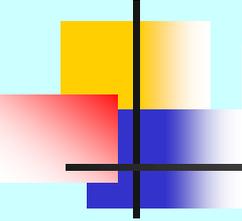
PO-MOESP

$$Y_P = \begin{bmatrix} y_t & y_{t+1} & \cdots & y_{t+N-1} \\ y_{t+1} & y_{t+2} & \cdots & y_{t+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t+i-1} & y_{t+i} & \cdots & y_{t+N+i-2} \end{bmatrix} (li, N)$$

$$Y_F = \begin{bmatrix} y_{t+i} & y_{t+i+1} & \cdots & y_{t+N+i-1} \\ y_{t+i+1} & y_{t+i+2} & \cdots & y_{t+N+i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t+2i-1} & y_{t+2i} & \cdots & y_{t+N+2i-2} \end{bmatrix} (li, N)$$

La matriz de datos Y se divide en dos matrices Y_P e Y_F (pasado y futuro)

Se hace lo mismo con U y N



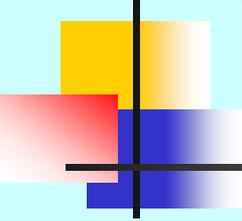
PO-MOESP

La ecuación del modelo se formula en términos de los datos “futuros” Y_F , U_F

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + N_F$$

Se multiplica por $\Pi_{U_F}^\perp$, para eliminar el término HU

$$Y_F \Pi_{U_F}^\perp = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F}^\perp + N_F \Pi_{U_F}^\perp$$



PO- MOESP

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp}$$

El ruido se elimina utilizando la variable instrumental:

$$W_P^T = \begin{bmatrix} U_P^T & Y_P^T \end{bmatrix}$$

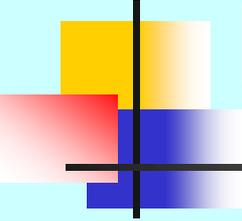
$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_P^T + N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T$$

$$E[n_f u_p^T] = 0,$$

$$E[n_f y_p^T] = 0$$

$$\lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_T} N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = 0$$

Los ruidos “futuros” no dependen de las señales “pasadas”



PO-MOESP

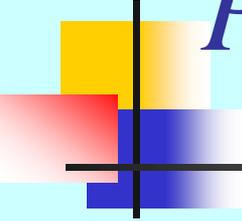
$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T$$

como $\text{rango}(X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T) = n$

n puede calcularse de forma similar a partir de:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T$$

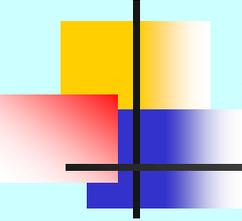
y Γ_i y H calcularse como anteriormente



PO-MOESP

Una alternativa eficiente para calcular Γ_i es usar la decomposición RQ :

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_P \\ Y_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ R_{21} & R_{22} & & \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$



PO- MOESP

Puede probarse que:

$$\Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = \begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T$$

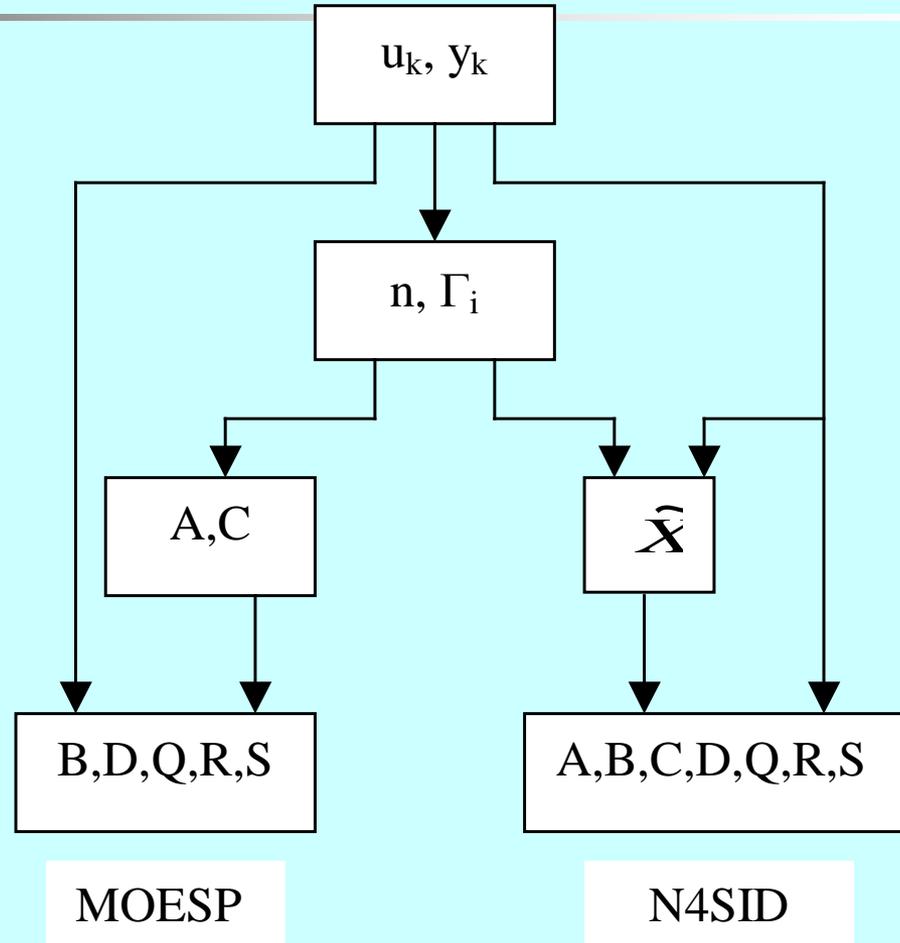
$$\begin{bmatrix} R_{42} & R_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix}$$

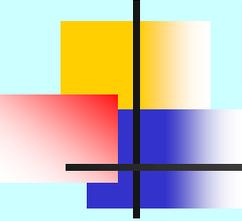
$$\Gamma_i = U_n \quad X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = S_n V_n^T \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T$$

N4SID (Numerics for(4) Subspace Identification)

La primera parte
es similar a
MOESP pero
usando la
proyección
oblicua

N4SID usa
también la
partición de datos
P, F





N4SID

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + N_F$$

Cancelamos U_F usando $\Pi_{U_F^\perp}$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp}$$

$$N_F \Pi_{U_F^\perp} = N_F$$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F$$

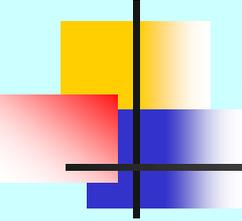
$$\mathbf{W}_1 \mathbf{Y}_F \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 \Gamma_i \mathbf{X}_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_1 \mathbf{N}_F \mathbf{W}_2$$

\mathbf{W}_1 y \mathbf{W}_2 escogidas de modo que:

$$\text{rango}(\mathbf{W}_1 \Gamma_i) = \text{rango}(\Gamma_i)$$

$$\text{rango}(\mathbf{X}_i) = \text{rango}(\mathbf{X}_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2)$$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{N}_F \mathbf{W}_2 = 0$$



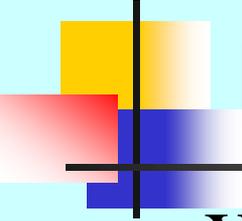
N4SID

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}_{li} \quad \mathbf{W}_2 = (\mathbf{W}_p \Pi_{U_F^\perp})^\dagger \mathbf{W}_p \quad \mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_F \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2 = \Gamma_i \mathbf{X}_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2$$

$$\mathbf{Y}_F \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{bmatrix}$$

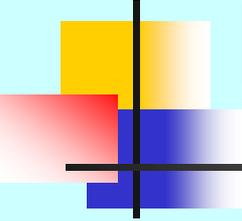
$$\Gamma_i = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \quad \mathbf{X}_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \mathbf{W}_2 = \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T$$



N4SID

$$\begin{aligned} X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_2 &= X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} (W_p \Pi_{U_F^\perp})^\dagger W_P = \\ &= X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \left[(W_p \Pi_{U_F^\perp})^T (W_p \Pi_{U_F^\perp}) \right]^{-1} (W_p \Pi_{U_F^\perp})^T W_P = \\ &= X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} (W_p \Pi_{U_F^\perp})^{-1} \left((W_p \Pi_{U_F^\perp})^T \right)^{-1} \Pi_{U_F^\perp}^T W_p^T W_P = \\ &= X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} \Pi_{U_F^\perp}^{-1} W_p^{-1} W_p^T \Pi_{U_F^\perp}^T \Pi_{U_F^\perp} W_p^T W_P = \\ &= X_{i,N} W_p^{-1} W_p^T W_P = X_{i,N} W_p^{-1} W_P = X_{i,N} \end{aligned}$$

$$X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_2 = \tilde{X}_{i,N} = S_n^{1/2} V_n^T$$



N4SID

\tilde{X}_{i+1} puede calcularse de forma similar

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{F^1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{F^1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix}$$

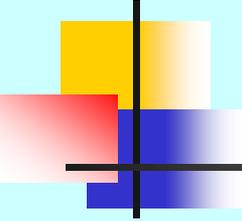
A, B, C, D se obtienen por minimización

$$\min_{A,B,C,D} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{F^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{F^1} \end{bmatrix} \right\|_F^2$$

Alternativa para la estimación del estado

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ \vdots \\ y_{t+i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \hat{x}_t + \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & \dots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ \vdots \\ u_{t+i-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ e_{t+1} \\ \vdots \\ e_{t+i-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_i^+(t) = \mathbf{\Gamma}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_i^+(t) + \mathbf{E}_i^+(t)$$



Estimación de $x(t)$

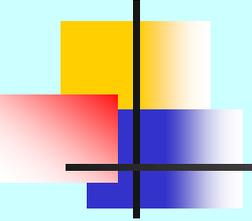
$x(t)$ será una combinación lineal de $u(t-1), \dots, u(t-i), y(t-1), \dots, y(t-i)$

$$\hat{x}_i(t) = [H_1 \ H_2] \begin{bmatrix} Y_i^- \\ U_i^- \end{bmatrix}$$

$$Y_i^+(t) = \Gamma_i \hat{x}_i(t) + H_i U_i^+(t) + E_i^+(t)$$

$$Y_i^+(t) = \underbrace{\Gamma_i [H_1 \ H_2]}_{[L_1 \ L_2]} \begin{bmatrix} Y_i^- \\ U_i^- \end{bmatrix} + H_i U_i^+(t) + E_i^+(t)$$

L_1, L_2, H_i pueden estimarse por regresión lineal



Estimación de $x(t)$

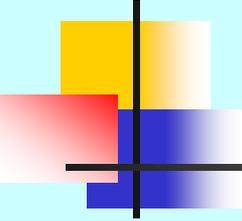
$$[L_1, L_2] \text{ tiene rango } n \quad [L_1, L_2] = \Gamma_i [H_1, H_2]$$

Usando su SVD:

$$[L_1 \ L_2] = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix}$$

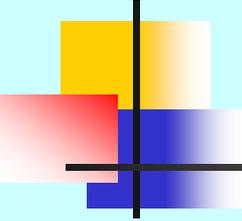
$$\Gamma_i = U_1 \Sigma^{1/2} \quad [H_1 \ H_2] = U_1 \Sigma^{1/2}$$

$$\hat{x}_i(t) = [H_1 \ H_2] \begin{bmatrix} Y_i^- \\ U_i^- \end{bmatrix} = \Sigma^{1/2} V_1' \begin{bmatrix} Y_i^- \\ U_i^- \end{bmatrix}$$



Otra Alternativa: decomposición RQ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_P \\ \mathbf{U}_F \\ \mathbf{Y}_P \\ \mathbf{Y}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & & & \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & & \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \\ \mathbf{R}_{41} & \mathbf{R}_{42} & \mathbf{R}_{43} & \mathbf{R}_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix}$$



N4SID

$$Z_i = Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_2 = \begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & M \end{bmatrix}^\dagger W_P$$

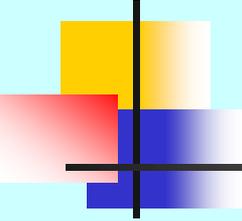
$$F = \left[\begin{bmatrix} R_{41} & R_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{41} & R_{42} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^\dagger * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$G = \begin{bmatrix} R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

$$K = \left[\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^\dagger * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_P = \begin{bmatrix} U_P \\ Y_P \end{bmatrix}$$



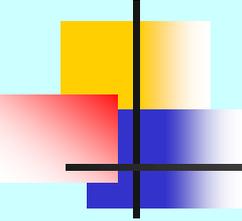
N4SID

$$Z_i = [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_o^T \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_i = U_n S_n^{1/2}$$

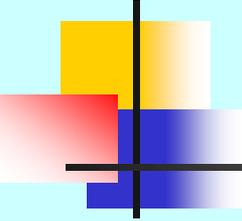
$$X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_2 = \tilde{X}_{i,N}$$

$$\tilde{X}_{i,N} = \Gamma_i^\dagger Z_i$$



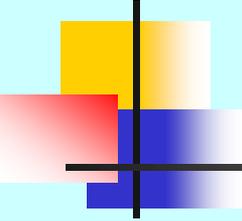
Indice

- Interés
- Dificultades
- Algunos métodos de identificación
- Identificación con subespacios
- Ejemplos



Identificación en lazo cerrado

- Hay situaciones (plantas inestables en lazo abierto, o con integradores) en las que los experimentos han de realizarse en lazo cerrado
- Se desea garantizar la operación en un rango durante los experimentos
- A veces, solo se dispone de datos de operación tomados en lazo cerrado, con cambios significativos o excitación externa
- Se desea mejorar la identificación en un rango de frecuencias de interés, cercano al punto crítico



Dificultades

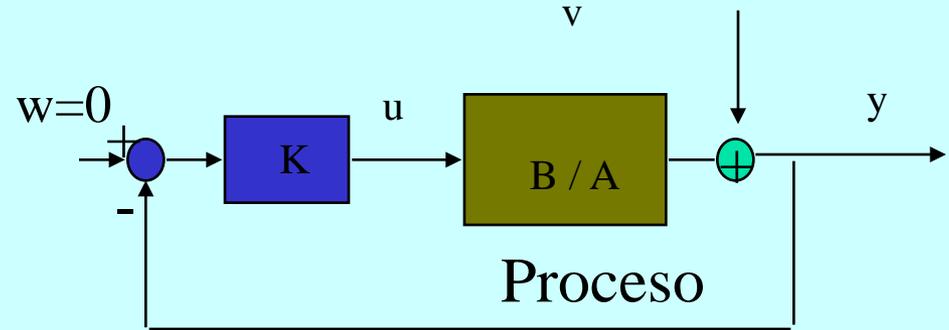
- La información en lazo cerrado puede no ser lo suficientemente rica y se necesita excitación externa
- La identificabilidad puede depender del tipo de regulador
- Algunos métodos de identificación u/y dan estimas sesgadas si la identificación se realiza con datos en lazo cerrado

Dificultades, orden del Reg.

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1) + v(t)$$

$$u(t) = -Ky(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -ay(t-1) - bKy(t-1) + v(t) = \\ &= -[a + bK]y(t-1) + v(t) \end{aligned}$$



A pesar de que la u está persistentemente excitada, en una identificación u/y es válida cualquier solución del tipo:

$$\hat{a} = a + \lambda K$$

$$\hat{b} = b - \lambda$$

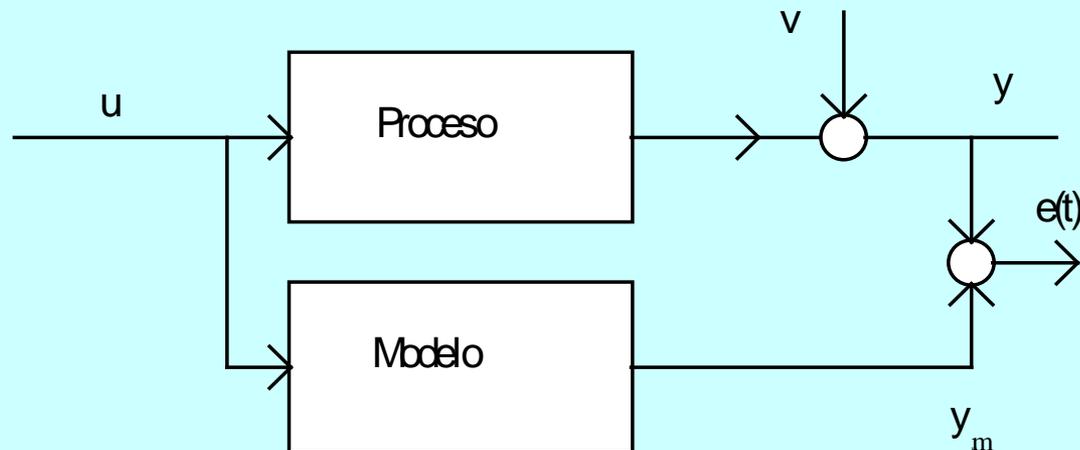
$$\begin{aligned} y(t) &= -[\hat{a} + \hat{b}K]y(t-1) + v(t) = -[a + \lambda K + bK - \lambda K]y(t-1) + v(t) = \\ &= -[a + bK]y(t-1) + v(t) \end{aligned}$$

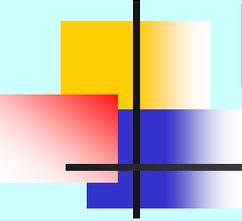
Dificultades (LS)

Modelo (LS): $y_m(t) = \varphi(t)' \theta$

Criterio de estimación: Dado un conjunto de datos experimentales $u(t)$, $y(t)$, minimizar respecto a los parámetros θ :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(y(t) - y_m(t))]^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(y(t) - \varphi(t)' \theta)]^2$$





Mínimos cuadrados

$$\min_{\theta} V = \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(y(t) - \varphi(t)' \theta)]^2$$

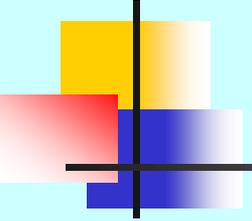
$$\Phi' = [\varphi(1) | \varphi(2) | \dots | \varphi(N)]$$
$$\mathbf{y}' = [y(1), y(2), \dots, y(N)]$$

$\varphi(t)$ es un vector de datos que depende del tipo de modelo

$$\hat{\theta} = [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' \mathbf{y}$$

$$[\Phi' \Phi] = \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)'$$

Debe ser invertible



Propiedades (1)

Suponiendo que el proceso puede ser representado de forma exacta por $y(t) = \varphi(t)' \theta_0 + v(t)$

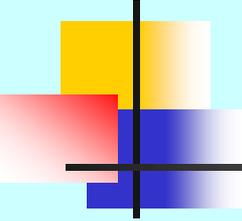
$$\hat{\theta} = [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' \mathbf{y}$$

$$\hat{\theta} = [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' [\Phi \theta_0 + \mathbf{v}] \quad \hat{\theta} = \theta_0 + [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' \mathbf{v}$$

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta_0 + E\{[\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' \mathbf{v}\}$$

Si $E\{[\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' \mathbf{v}\} = 0$ la estima es no sesgada

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta_0$$



Propiedades (2)

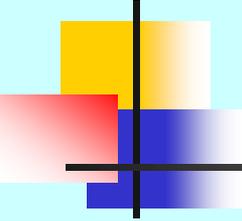
¿Cuándo el término $E\{[\Phi'\Phi]^{-1}\Phi'\mathbf{v}\}$ es nulo?

$$E\{[\Phi'\Phi]^{-1}\Phi'\mathbf{v}\} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi'(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t) \right]$$

La inversa será no nula,
luego el término determina
el sesgo

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t) \approx \mathbf{R}_{\varphi v}(0)$$

Para que la estima de θ no sea sesgada los datos $\varphi(t)$ no deben estar correlacionados con los ruidos $v(t)$



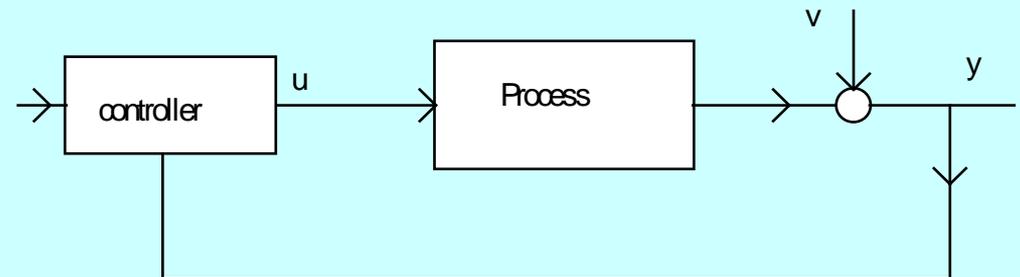
Sesgo (resp. Impulso)

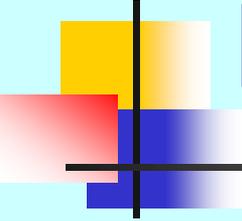
$$\varphi(t)' = [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-m)]$$

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta_0 + E\{[\Phi'\Phi]^{-1}\Phi'\mathbf{v}\}$$

La estimación puede ser sesgada en lazo cerrado: v y u están correlacionadas a través de la y de realimentación

Estimación no sesgada en lazo abierto: u y v no correlacionados

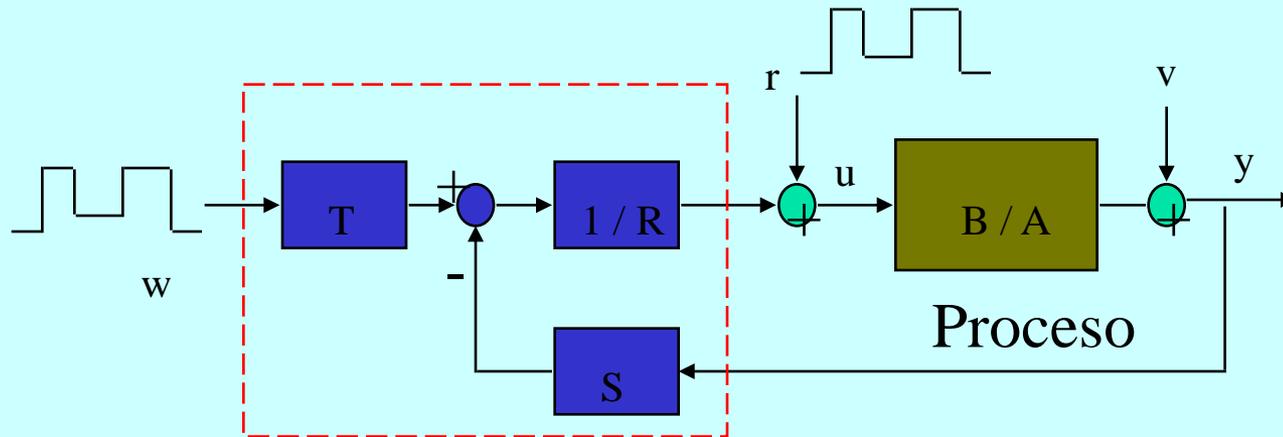




Métodos

- Identificar con algoritmos PEM con datos en lazo cerrado
- Identificar la función de transferencia en lazo cerrado y obtener de ella la de lazo abierto
- Métodos de error de la salida en lazo cerrado
- Métodos de error de la salida en lazo abierto filtrado
- Métodos de subespacios en lazo cerrado

Identificación en lazo cerrado



Pueden usarse datos de entrada - salida, u e y en lazo cerrado y métodos PEM

La identificación no es mejor en la zona de frecuencias de interés

Interpretación en frecuencia (1)

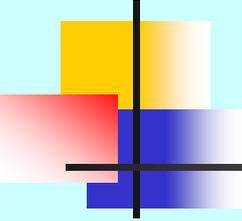
$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[y(t) - \sum_{i=1}^n g_i \Delta u(t-i) \right]^2 \quad \text{Modelo respuesta impulso}$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} q^{-k} \Delta u(t) + v(t) - \sum_{i=1}^n g_i q^{-i} \Delta u(t) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} q^{-k} - \sum_{i=1}^n g_i q^{-i} \right) \Delta u(t) + v(t) \right]^2$$

Datos tomados en lazo abierto: u y v están incorrelacionados

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} q^{-k} - \sum_{i=1}^n g_i q^{-i} \right)^2 \Delta u(t)^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [v(t)]^2$$



Dominio de la frecuencia (2)

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} q^{-k} - \sum_{i=1}^n g_i q^{-i} \right)^2 \Delta u(t)^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [v(t)]^2$$

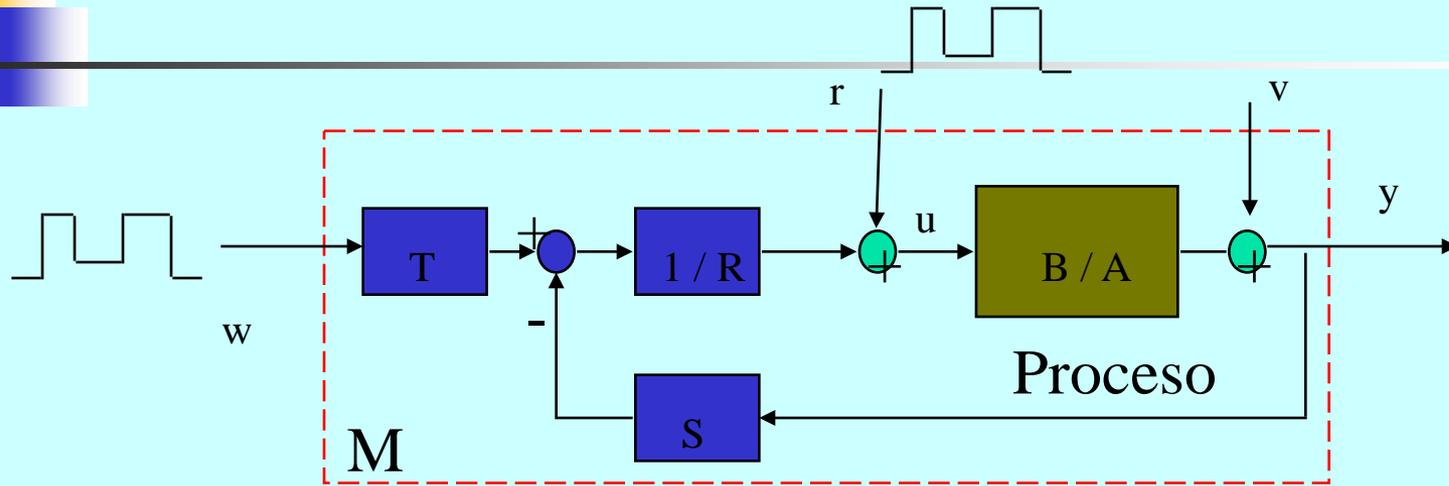
Igualdad de Parserval

$$\int_0^{NT} x(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_x(\omega) d\omega$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} e^{-jk\omega T} - \sum_{i=1}^n g_i e^{-ji\omega T} \right)^2 \Phi_{\Delta u}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_v(\omega) d\omega$$

Los errores están pesados en cada frecuencia por el espectro de potencia de los datos de entrada. El modelo, a las frecuencias que no se exciten presentará mayor error que aquellas donde $\Phi_{\Delta u}(\omega)$ sea significativo

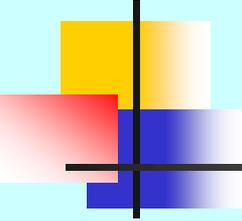
Identificación en lazo cerrado



Puede identificarse el sistema completo M entre w e y o entre r e y como un proceso cualquiera si hay una excitación adecuada. Posteriormente se calcula B/A mediante:

$$M = \frac{BT}{AR + BS}$$

La solución depende del orden del regulador

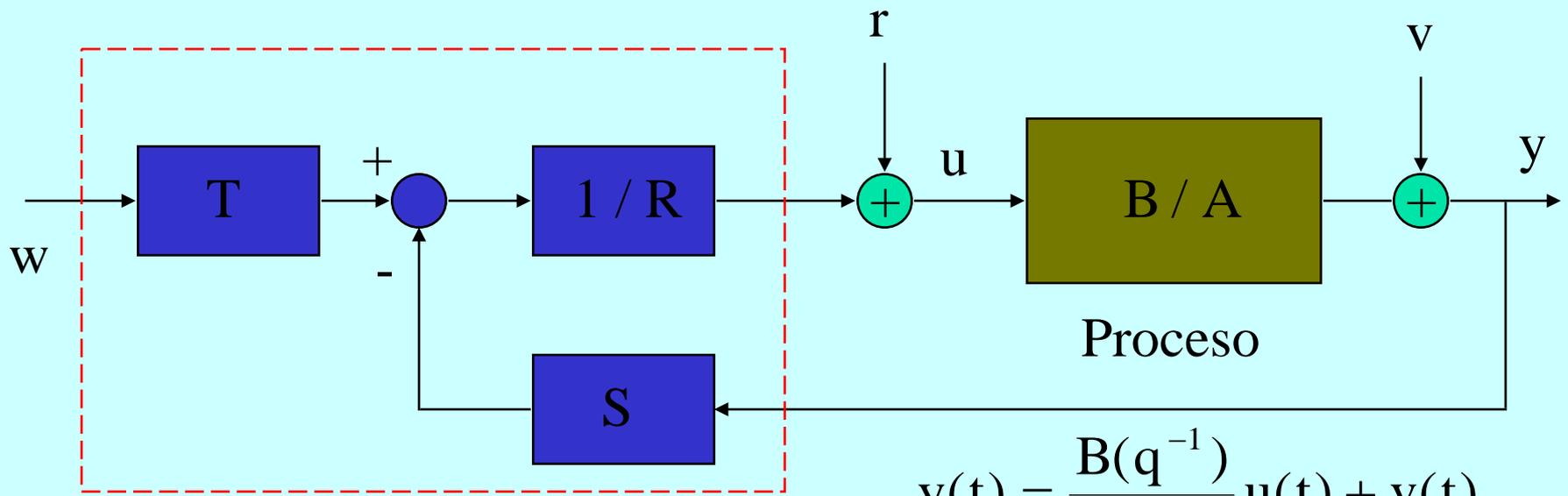


Identificación en lazo cerrado

El objetivo es obtener una identificación mas próxima al sistema real en la región de frecuencias en torno al punto crítico, que es la mas importante en el diseño de un controlador

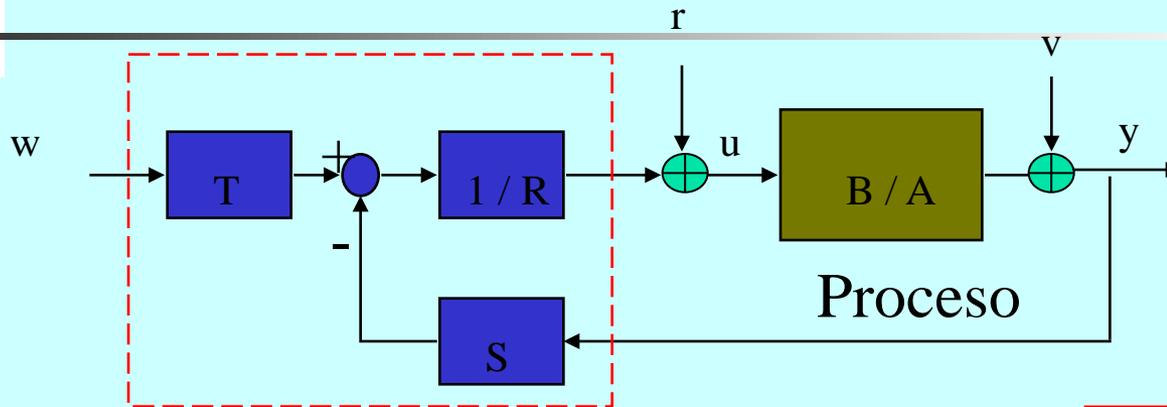
Para ello se utiliza una función de coste para identificar similar al objetivo de diseño del controlador, dentro del contexto de la metodología de identificación en lazo cerrado y re-diseño del controlador

Identificación en lazo cerrado



$$u(t) = r(t) + \frac{1}{R(q^{-1})} \left[T(q^{-1})w(t) - S(q^{-1})y(t) \right]$$

Funciones de transferencia



$$y = \frac{BT}{AR + BS} w + \frac{BR}{AR + BS} r + \frac{AR}{AR + BS} v$$

$$u = \frac{AT}{AR + BS} w + \frac{AR}{AR + BS} r - \frac{AS}{AR + BS} v$$

$$S_{wy}$$

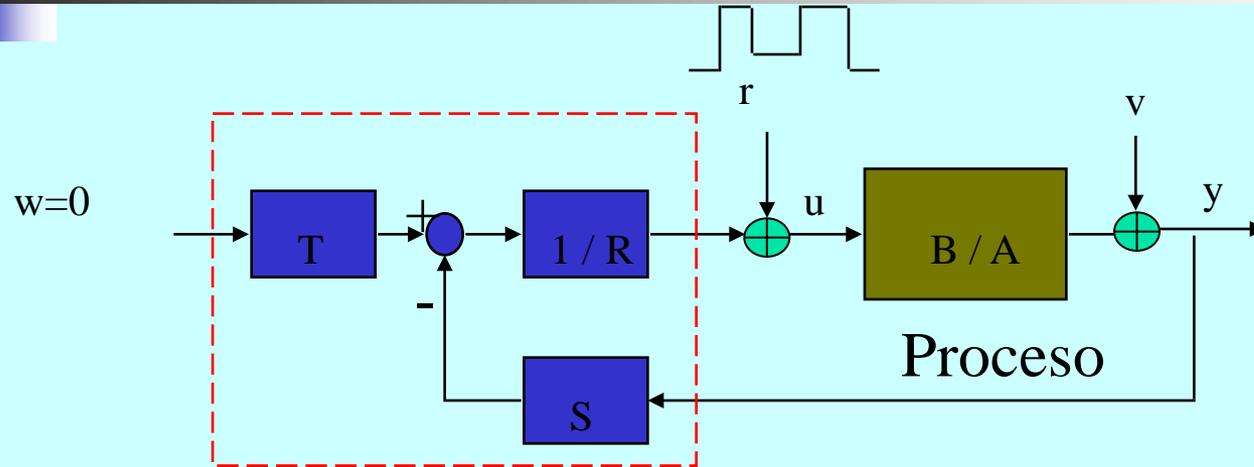
$$S_{ru}$$

$$S_{vu}$$

$$S_{vy} = S_{ru}$$

Como S_{ru} depende de datos medibles, S_{vy} puede ser identificado

Identificación en lazo cerrado

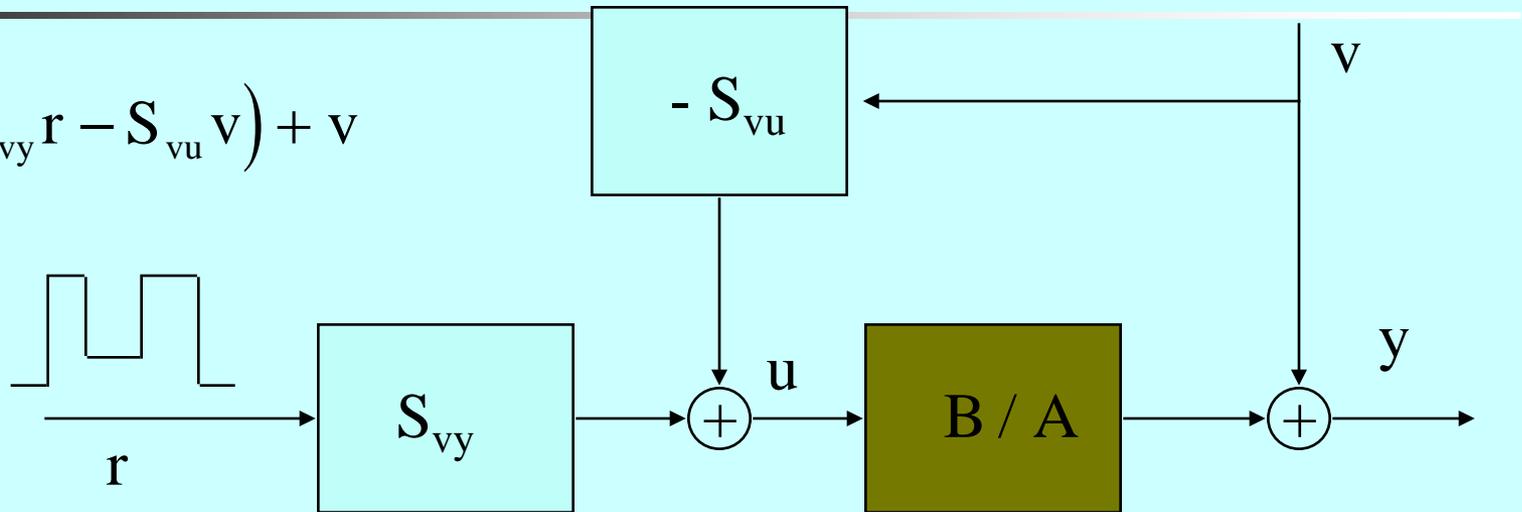


Con $w=0$

$$y = \frac{B}{A} u + v = \frac{B}{A} (S_{ru} r - S_{vu} v) + v =$$
$$= \frac{B}{A} (S_{vy} r - S_{vu} v) + v$$

Interés de la CL-ID

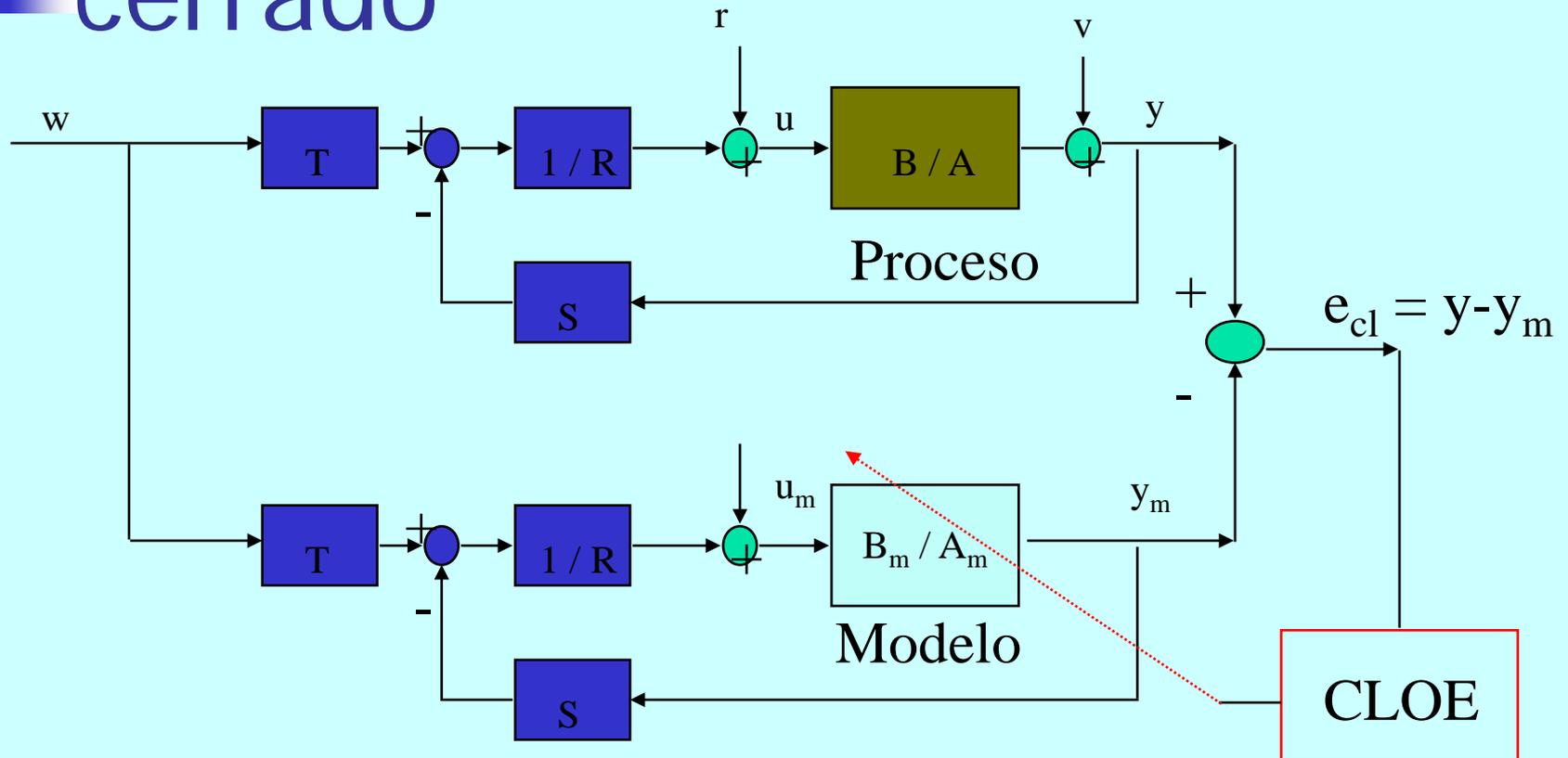
$$y = \frac{B}{A} (S_{vy} r - S_{vu} v) + v$$



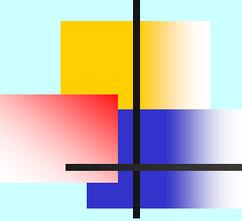
Identificar en lazo cerrado entre y & u con excitación en r , asegura que u recibe componentes filtrados por S_{vy} . Así se mejora la identificación en frecuencias cercanas a la del margen de módulo, donde S_{vy} es grande.

Problema de ruido a través de $-S_{vu}v$

Método de identificación del error de la salida en lazo cerrado



Closed Loop Output Error CLOE



Dominio de la frecuencia

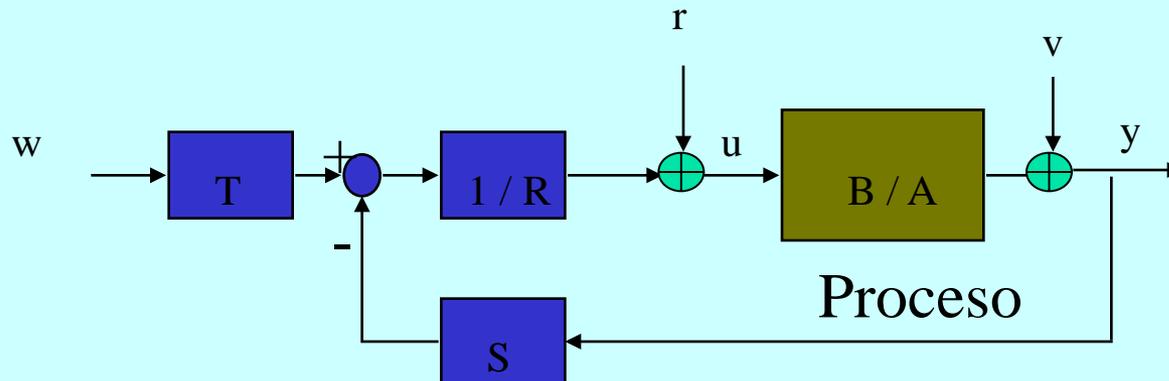
$$V = \int_{-\pi}^{\pi} |G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)|^2 |S_{vy}(j\omega)|^2 \left(|\hat{S}_{wu_m}(j\omega)|^2 \Phi_w(\omega) + |\hat{S}_{vy_m}(j\omega)|^2 \Phi_r(\omega) \right) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |S_{vy}(j\omega)|^2 \Phi_v(\omega) d\omega$$

- El ruido no afecta la estimación de los parámetros
- Los errores disminuyen en la región donde S_{vy} y el espectro de la señal de excitación son grandes

FOL

Filtered Open Loop Identification Algorithms

Algoritmos estandar de identificación en lazo abierto pero utilizando datos filtrados de entrada- salida obtenidos en lazo cerrado



No necesitan conocimiento del controlador

FOL

$$y(t) = G(q^{-1}) \left[\frac{Tw(t) - Sy(t)}{R} + r(t) \right] + v(t)$$

$$y_m(t) = \hat{G}(q^{-1}) \left[\frac{Tw(t) - Sy_m(t)}{R} + r(t) \right]$$

con $w = 0$ $Gr + v - \hat{G}r = e_0$

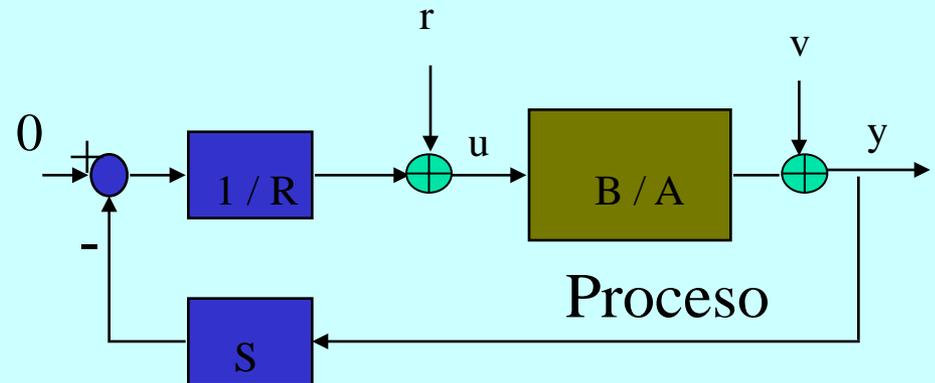
$$y - y_m = e_0 - \frac{SB}{RA} y + \frac{S\hat{B}}{R\hat{A}} y_m$$

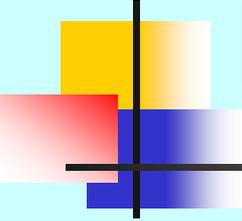
$$\frac{RA + SB}{RA} y - \frac{R\hat{A} + S\hat{B}}{R\hat{A}} y_m = e_0$$

$$S_{vy_i}^{-1} y - \hat{S}_{vy_i}^{-1} y_m = e_0$$

Filtrando con $S_{vy_i}^{-1}$ el error en lazo cerrado se genera el error e_0

e_0 error proceso/modelo
generado si se hubiera
aplicado la señal r en lazo
abierto

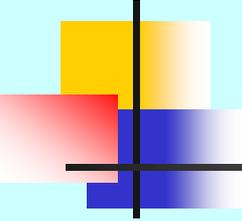




FOL-OE

$$e_{cl}(t) = \hat{S}_{vy} e(t) = \hat{S}_{vy} [y(t) - y_m(t)] = \underbrace{\hat{S}_{vy} y(t)}_{y_f} - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \underbrace{\hat{S}_{vy} u(t)}_{u_f}$$

- Minimizar los errores en lazo cerrado equivale a aplicar el algoritmo de lazo abierto Output Error (OE) con datos filtrados por la estimación de la función de sensibilidad de la salida S_{vy}
- S_{vy} puede estimarse identificando S_{ru} entre r y u previamente
- Proporciona una estimación sesgada debido al ruido

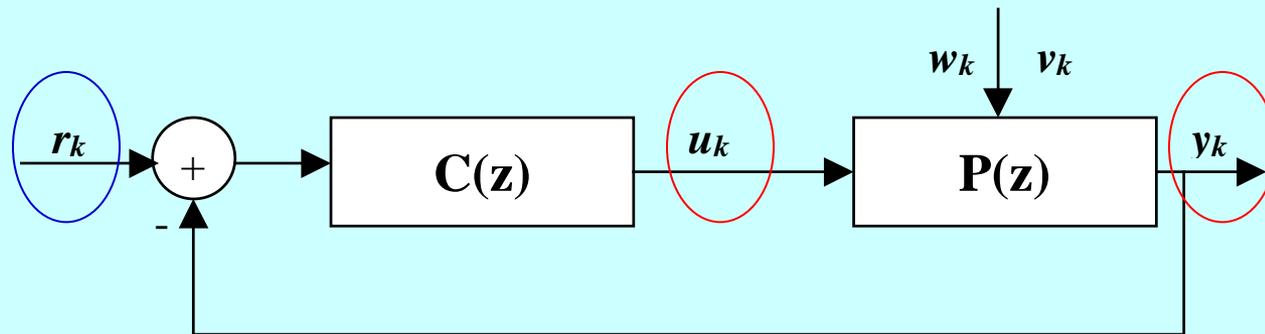


FOL-IV dominio frecuencial

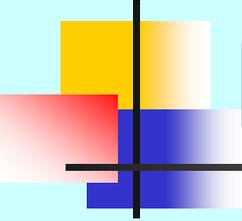
$$V = \int_{-\pi}^{\pi} |G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)|^2 |S_{vy}(j\omega)|^2 |\hat{S}_{vy}(j\omega)|^2 \Phi_r(\omega) d\omega +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |S_{vy}(j\omega)|^2 |\hat{S}_{vy}(j\omega)|^2 \Phi_v(\omega) d\omega$$

- No presenta sesgo
- La estimación se mejora en el rango de frecuencias en que S_{vy} y la señal de excitación en r son altas
- Es proxima a la expresión del algoritmo CLOE

Métodos de subespacios

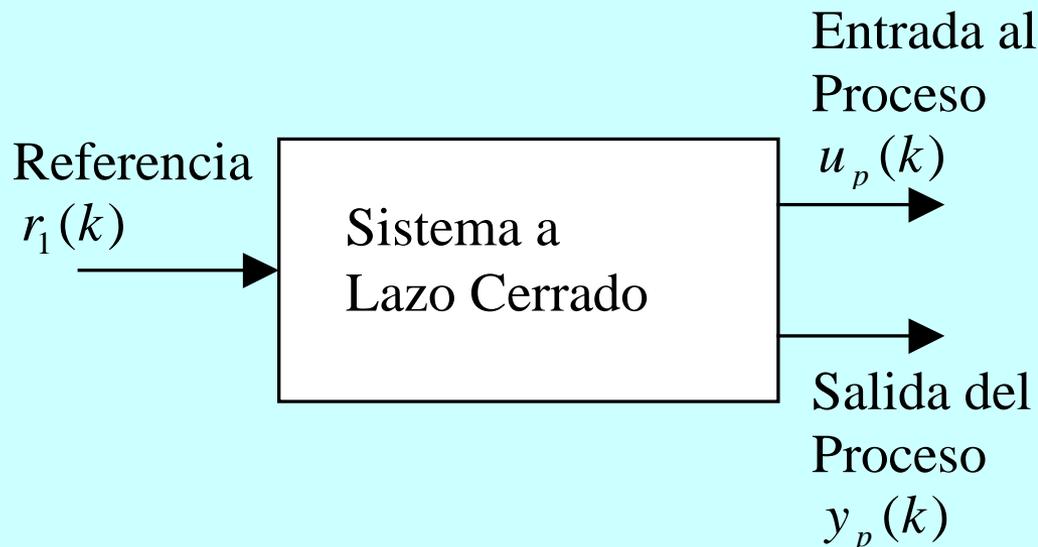


Consideran un sistema equivalente donde u e y son salidas y r entrada



Métodos de subespacios

Métodos de Entrada/Salida: Modelo Global



Modelo proceso - controlador

$$u_c = r_1 - y_p$$

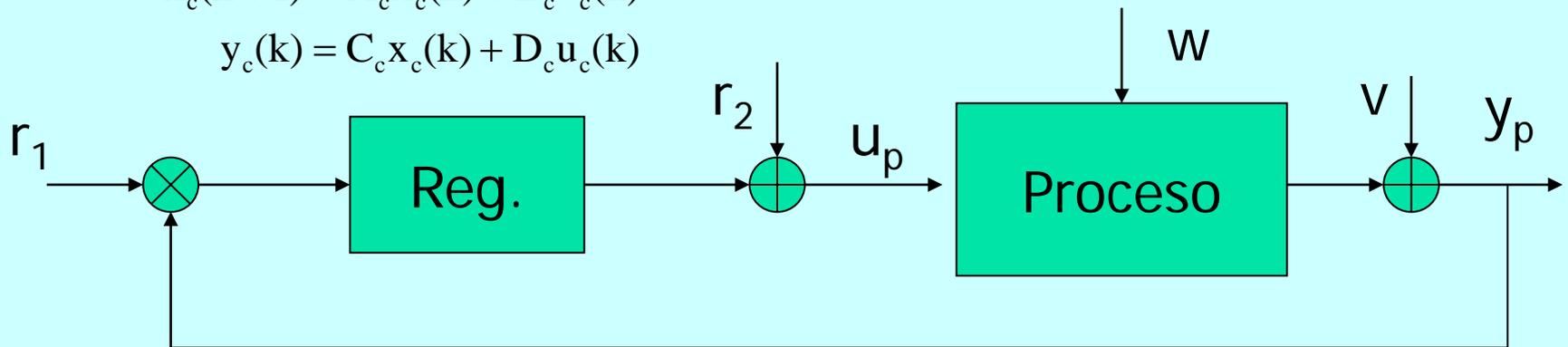
$$u_p = r_2 + y_c$$

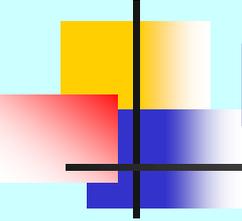
$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u_c(k)$$

$$y_c(k) = C_c x_c(k) + D_c u_c(k)$$

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + B_p u_p(k) + w(k)$$

$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_p u_p(k) + v(k)$$





Modelo Proceso - controlador

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{w}(k)$$

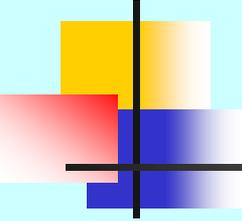
$$\mathbf{y}_p(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{D}_p \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{v}(k) \quad \mathbf{u}_c = \mathbf{r}_1 - \mathbf{y}_p$$

$$\mathbf{x}_c(k+1) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(k) \quad \mathbf{u}_p = \mathbf{r}_2 + \mathbf{y}_c$$

$$\mathbf{y}_c(k) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(k) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}_c(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(k) \\ \mathbf{r}_2(k) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\sigma}_w(k)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_p(k) \\ \mathbf{y}_p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(k) \\ \mathbf{r}_2(k) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\sigma}_v(k)$$

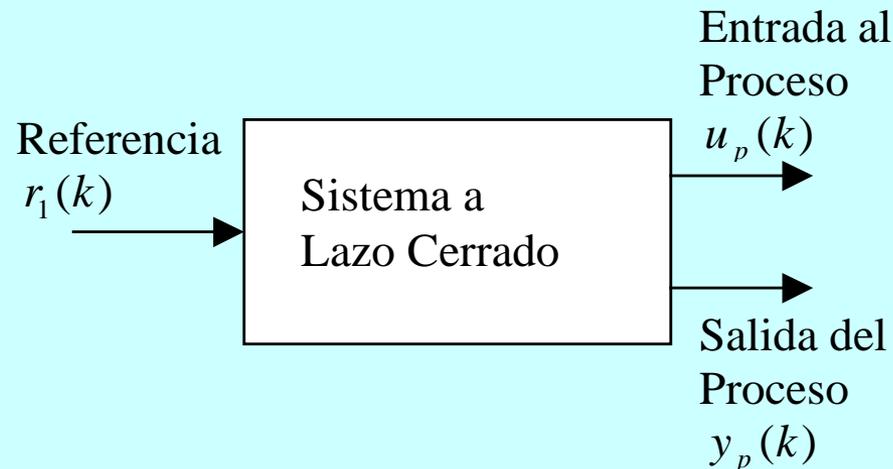


Identificación a Lazo Cerrado

- Métodos Basados en Subespacios:
 - Método Indirecto:
 - Desarrollado por Peter Van Overschee y Bart de Moor. Supone conocer los parámetros de Markov del controlador.
 - Método Entrada/salida.
 - Desarrollado por Michel Verhaegen. Parte un modelo global el cual es analíticamente reducido conociendo el orden del controlador

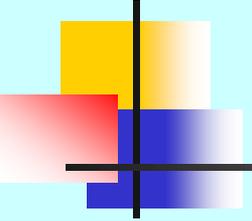
IdentCL

1. Identificar el sistema global



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2)\mathbf{r}_1(k) + \sigma_w(k)$$

$$\begin{pmatrix} u_p(k) \\ y_p(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{r}_1(k) + \sigma_v(k)$$



IdentCL

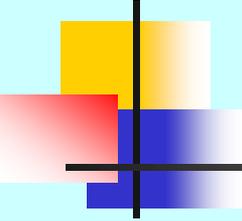
$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + \Phi_F$$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp}$$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_P^T + N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T$$

$$W_P = U_P$$

$$E[\Phi_f u_p^T] = 0, \quad \lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_T} N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = 0$$



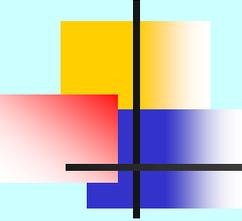
IdentCL

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T$$

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Q_x Q_x^T &= I \\ Q_y Q_x^T &= 0 \end{aligned}$$

$$\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F \quad \Pi_{U_F^\perp} = I - Q_1^T R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$\Pi_{U_F^\perp} = I - Q_1^T Q_1$$



IdentCL

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

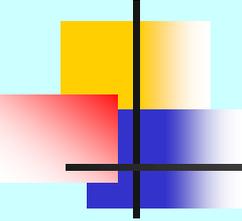
$$\Pi_{U_F^\perp} = I - Q_1^T Q_1$$

$$W_P = U_P$$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \begin{bmatrix} R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - Q_1^T Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21}^T \\ R_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = R_{32} R_{22}^T$$

$$\Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = R_{32} R_{22}^T$$



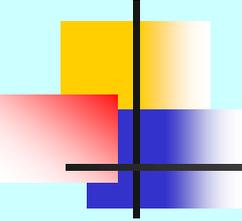
IdentCL

$$R_{32} = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_i = U_n$$

$$A_T = (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n$$

$$C_T = J_3 U_n$$



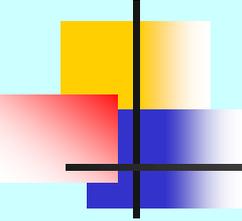
IdentCL

$$\Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = R_{32} R_{22}^T$$

$$Z_i = R_{32} R_{22}^\dagger U_p$$

$$\tilde{X}_T = \Gamma_i^\dagger Z_i$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T \\ C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_T \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix}$$

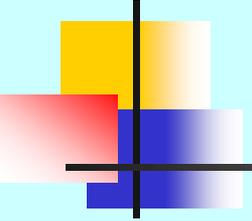


IdentCL

2. Simulación del modelo Global con la señal de referencia para obtener señales libres de ruido.

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_T \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_T r_1(k)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_p(k) \\ \mathbf{y}_p(k) \end{pmatrix} = \mathbf{C}_T \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} r_1(k)$$



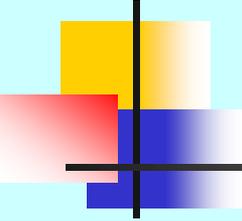
IdentCL

3. Obtener el modelo del proceso a Lazo Abierto con los datos obtenidos de la simulación libre de ruido.

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_p(k)$$

$$y_p(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}_p(k)$$

No es necesario conocer el controlador

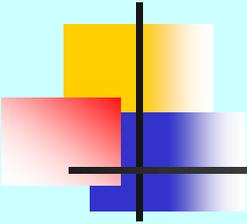


IdentCL ejemplo

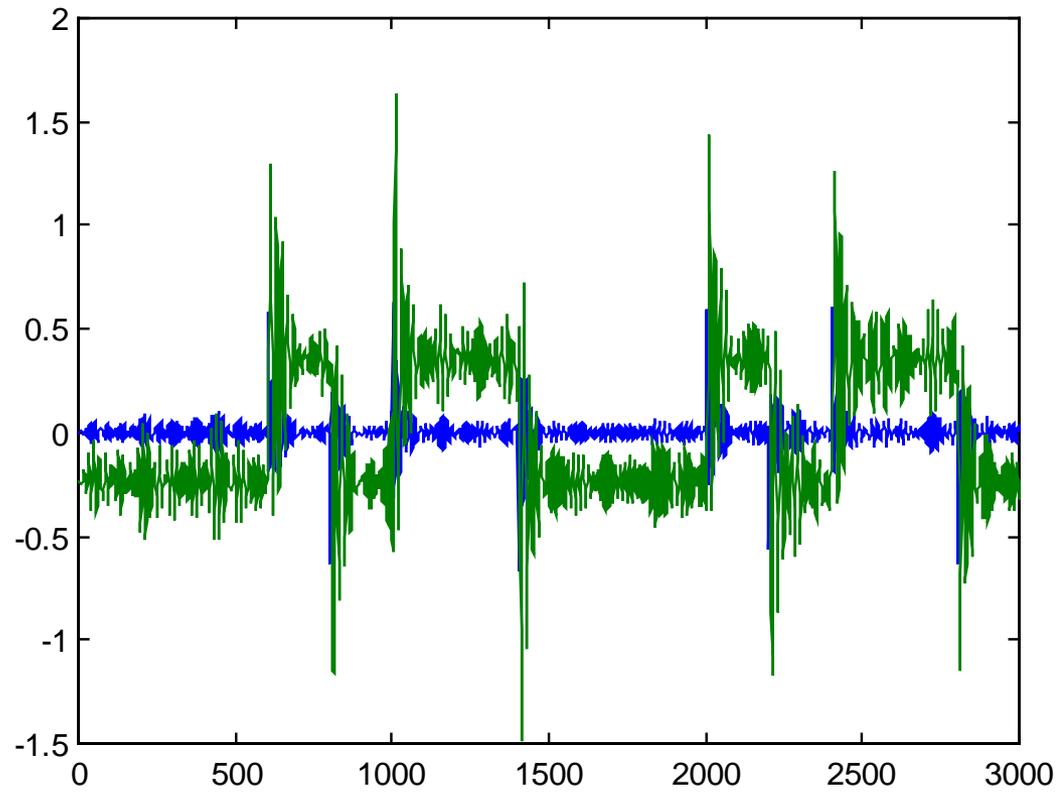
$$P(z) = \frac{10^{-3}(0.98z^4 + 12.99z^3 + 18.59z^2 + 3.30z - 0.02)}{z^5 - 4.4z^4 + 8.09z^3 - 7.83z^2 + 4z - 0.86}$$

$$C(z) = \frac{0.61z^4 - 2.03z^3 + 2.76z^2 - 1.83z + 0.49}{z^4 - 2.65z^3 + 3.11z^2 - 1.57z + 0.39}$$

$$D(z) = \frac{0.01(2.89z^2 + 11 - 13z + 2.74)}{z^3 - 2.7z^2 + 2.61z - 0.9}$$



IdentCL



IdentCL

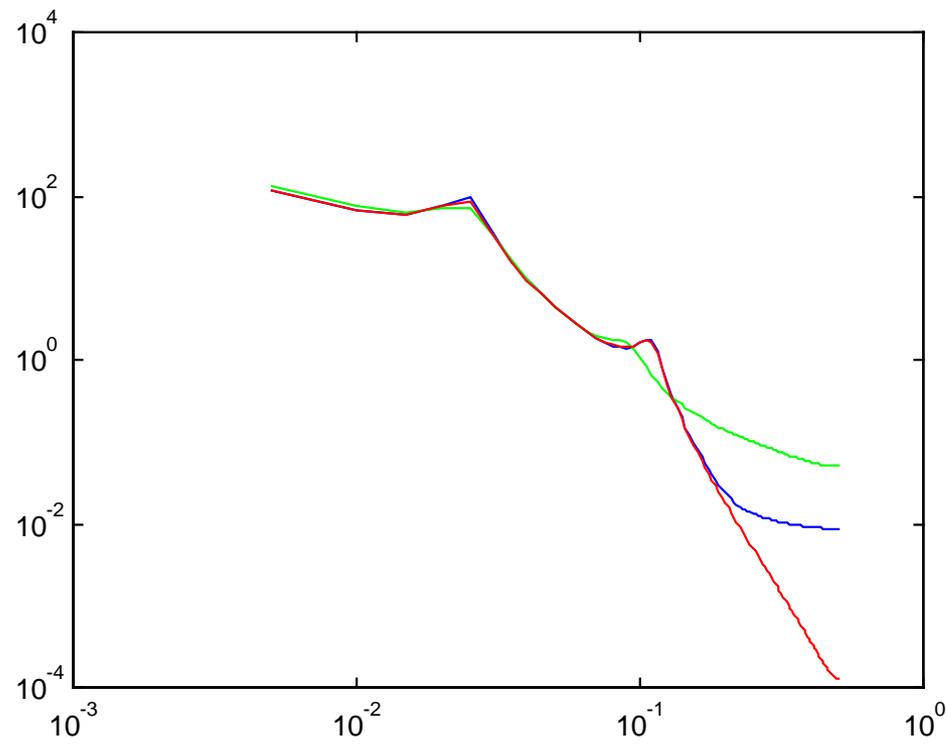


Figura 3.21. Diagrama de Bode.
Proceso real: Rojo
IdentCL: Azul, CLID.m: verde

IdentCL

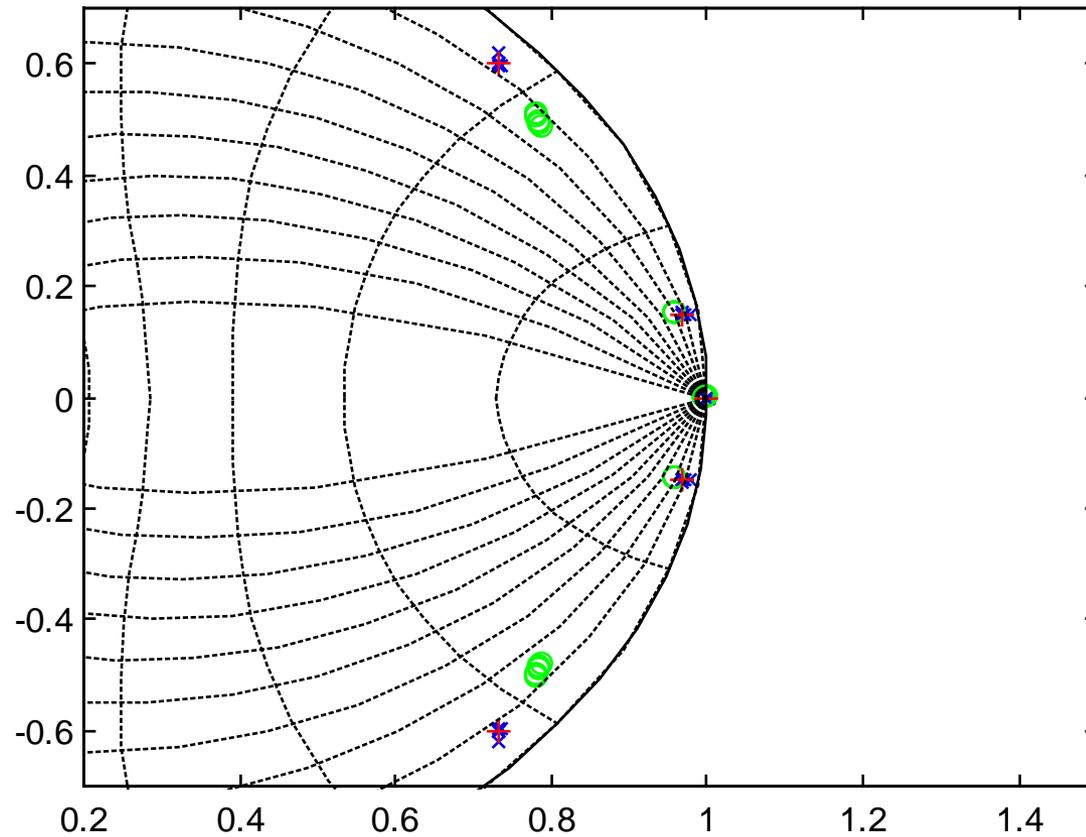


Figura 3.22. Lugar de las Raíces.

Proceso real: Rojo

IdentCL: '+'Azul, CLID.m: 'o' verde