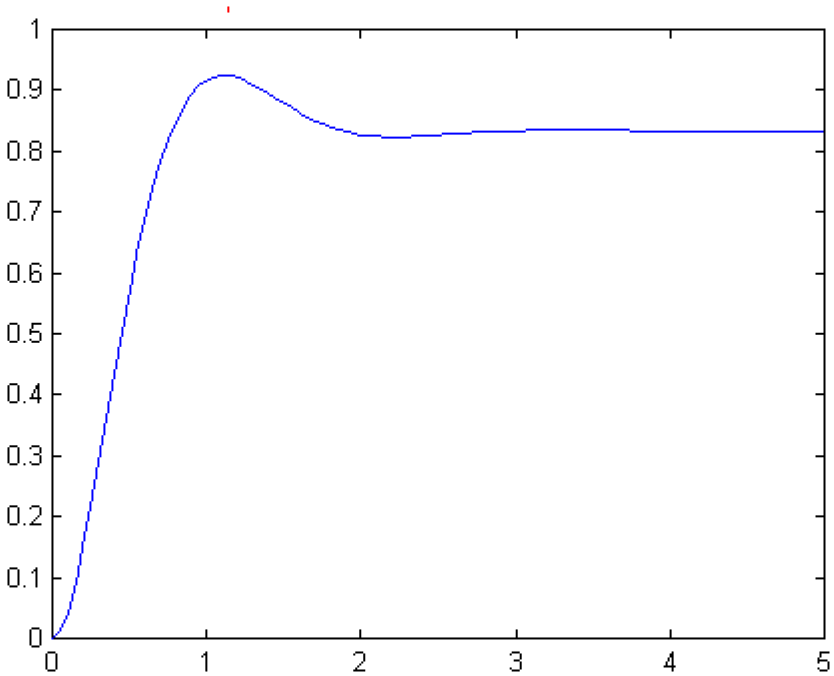
Examen de la Asignatura "Control e Instrumentación de Procesos Químicos"
4º curso de Ingeniería Química

Problema 7

En un proceso de secado se introduce al secadero un cierto flujo constante de material, junto con una corriente de un gas caliente, cuyo caudal puede manipularse por medio de la señal a un sistema ventilador. En un experimento consistente en disminuir la señal al ventilador un 10% desde una posición de equilibrio, se ha observado un cambio en la humedad del material como el de la figura. El transmisor está calibrado con un span de 5 unidades. Unidades de tiempo en minutos.

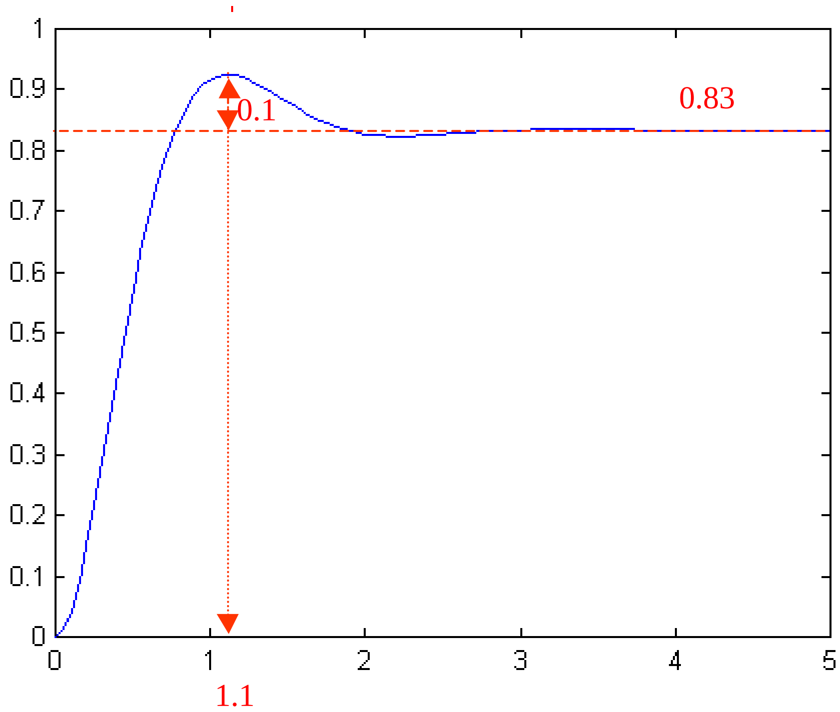


Se pide:
1) Para controlar la humedad se usa un controlador tipo P. Dibujar un diagrama de bloques del sistema de control resultante, especificando las funciones de transferencia.
2) Calcular el valor de la ganancia del regulador en %/%, para obtener un sobrepico del 20% en la respuesta en lazo cerrado a un salto de dos unidades en la consigna.
3) Calcular el valor de la ganancia del regulador para obtener un error estacionario inferior al 1 % en la respuesta en lazo cerrado a un salto del 2% en la consigna. ¿Cual será el valor estacionario de la variable manipulada en este caso?
4) Si la referencia oscila senoidalmente con una amplitud del 10% y un periodo de 0.1 min. Y se utiliza el valor de la ganancia del apartado 4) ¿Cómo será la salida del sistema al cabo de un tiempo bastante largo?
5) Calcular y explicar el diagrama del lugar de las raices del sistema.

Solución

1) Dado que la única información es la respuesta a un ensayo en salto, utilizaremos dicha gráfica para deducir un modelo lineal aproximado. De la forma de la respuesta, con sobrepico y oscilación y sin retardo, se deduce que podemos escoger un modelo de segundo orden del tipo:

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}$$



La ganancia K se calcula mediante el cociente entre el cambio en humedad en estado estacionario, 0.83, y el cambio en la apertura de la válvula -10%. Como se piden unidades en %/%, debemos convertir el cambio de humedad a escala de % teniendo en cuenta que 5 unidades son el 100% del transmisor.

$$K = (0.83 \ \ 100 / \ 5) / \ (-10) = -1.66 \ \% / \%$$

Para calcular el valor del amortiguamiento δ usaremos la medida del sobrepico. El valor del sobrepico es de 0.1 unidades y en % sobre el valor final: 0.1 100 /0.83 = 12 % y se sabe que la relación de este valor con el amortiguamiento viene dada por:

$$100e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

por tanto:

$$e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.12; \quad \ln(0.12) = \frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}; \quad (-2.12)^2 = \frac{\delta^2\pi^2}{1-\delta^2}$$

$$14.36\delta^2 = 4.495; \quad \delta = 0.56$$

Un valor similar de δ puede obtenerse de las gráficas %sobrepico / δ

Para calcular la frecuencia propia no amortiguada ω_n, usaremos el tiempo de pico. El tiempo de pico es de 1.1 min y se sabe que viene relacionado con los parámetros de la función de transferencia por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

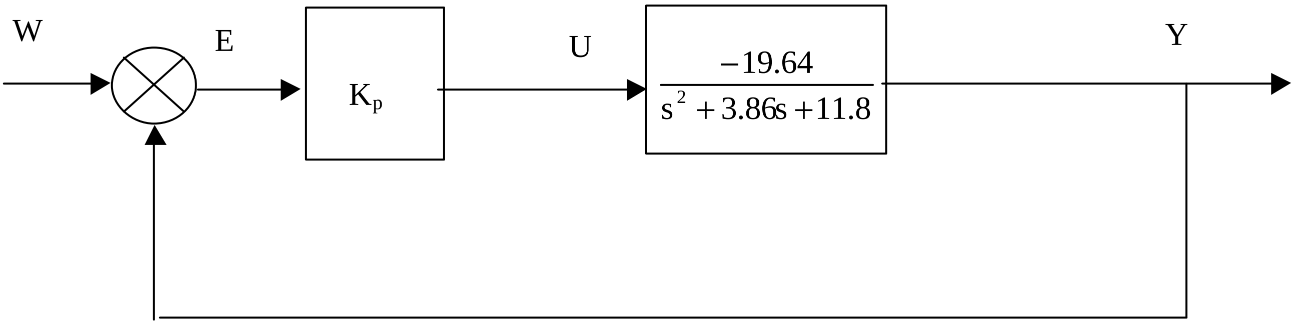
por tanto:

$$1.1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.56^2}}; \quad \omega_n = 3.44$$

y la función de transferencia resultante entre los cambios de temperatura y de posición de la valvula resulta ser en % / %:

$$\frac{-19.64}{s^2 + 3.86s + 11.8}$$

y el diagrama de bloques en lazo cerrado es:



2) La función de transferencia en lazo cerrado resulta ser:

$$Y(s) = \frac{G(s)R(s)}{1+G(s)R(s)}W(s) = \frac{\frac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8}}{1+\frac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8}}W(s) = \frac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}W(s)$$

Para obtener un sobrepico del 20% a un salto, independientemente del valor del mismo, el amortiguamiento en lazo cerrado debe ser

$$20 = 100e^{\frac{-\delta_c \pi}{\sqrt{1-\delta_c^2}}} \quad \Rightarrow \delta_c = 0.45$$

o sea: $$3.86 = 2\delta_c w_{cn} = 2 \ \ 0.45\sqrt{11.8 - 19.64K_p} \Rightarrow K_p = -0.34$$

3) La expresión del error en lazo cerrado es:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)R(s)}W(s) = \frac{1}{1+\dfrac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8}}W(s) = \frac{s^2+3.86s+11.8}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}\frac{20}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+3.86s+11.8}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}\frac{20}{s} = \frac{11.8 \quad 20}{11.8-19.64K_p} = 1 \Rightarrow K_p = -11.41$$

Dado que la función de transferencia entre U y W es:

$$U(s) = R(s)(W(s) - Y(s)) = R(s)(W(s) - G(s)U(s))$$

$$U(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)R(s)}W(s) = \frac{K_p}{1+\dfrac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8}}W(s) = \frac{K_p(s^2+3.86s+11.8)}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}W(s)$$

$$u_{ss} = \lim_{s\to 0} sU(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K_p(s^2+3.86s+11.8)}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}\frac{20}{s} = \frac{20K_p 11.8}{11.8-19.64K_p} = -11.41$$

o sea, un 11.41 % por debajo de su valor de equilibrio.

4) La respuesta del sistema en lazo cerrado a cambios seniodales en la referencia será también senoidal del mismo periodo 0.1 min, pero con una amplitud y desfase que vendran dados en función de la magnitud y fase la función de transferencia en lazo cerrado a la frecuencia $2\pi/0.1 = 20\pi$. Para calcularlas sustituiremos s por $j20\pi$ en la misma, daremos a K_p el valor –11.41, y calcularemos el módulo y argumento del complejo resultante:

$$\left.\frac{G(j\omega)R(j\omega)}{1+G(j\omega)R(j\omega)}\right|_{s=20\pi j} = \left.\frac{-19.64K_p}{s^2+3.86s+11.8-19.64K_p}\right|_{s=20\pi j} =$$

$$\frac{-19.64(-11.41)}{(j20)^2+3.86j20+11.8-19.64(-11.41)} = \frac{224.2}{-164+77.2j}$$

$$\left|\frac{224.2}{-164+77.2j}\right| = \frac{224.2}{\sqrt{164^2+77.2^2}} = 1.14; \qquad \arg\left(\frac{224.2}{-164+77.2j}\right) = -154.8^{\circ}$$

La amplitud de la oscilación será 1.14 . 10% = 11.4% y estará retrasada 154.8º = 0.1 154.8/360 = 0.043 minutos respecto a la referencia.

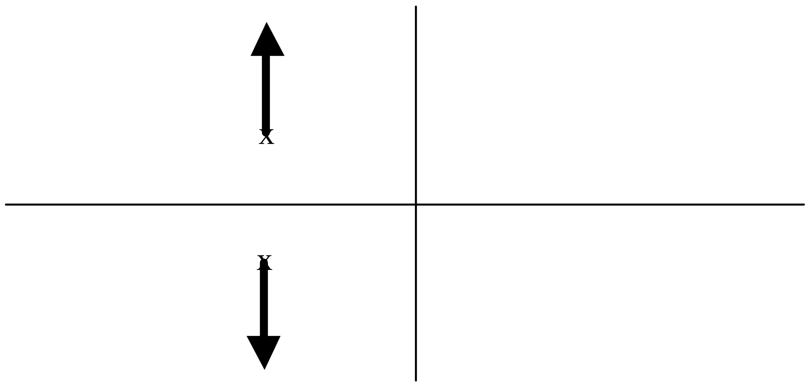
5) El diagrama del lugar de las raices corresponde a las posiciones en el plano s de las raices de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado para distintos valores de la ganancia K_p, o sea las raices de:

$$s^2 + 3.86s + 11.8 - 19.64K_p = 0$$

$$s = \frac{-3.86 \pm \sqrt{3.86^2 - 4(11.8 - 19.64K_p)}}{2} = \frac{-3.86 \pm \sqrt{-32.3 + 78.56K_p}}{2}$$

Para K_p= 0 resulta: $s = \dfrac{-3.86 \pm 5.68j}{2}$

Como el proceso tiene ganancia negativa, el controlador debe tenerla también. Si no fuera así, cuando aumentara la humedad disminuiria la corriente de gas caliente, operando al reves de lo que se espera para corregir las desviaciones. Cuando K_p tome valores negativos cada vez mayores, el radicando será negativo, por lo que tendremos la misma parte real negativa -3.86/2 y una parte imaginaria que ira siendo cada vez mayor. El diagrama resultante es:

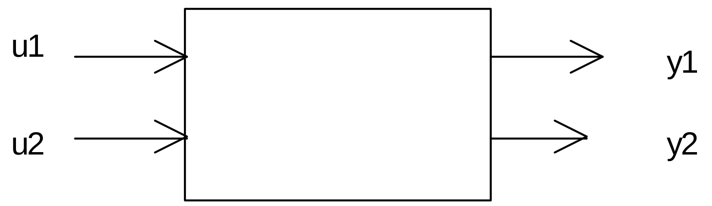


Lo que significa que para cualquier valor negativo de la ganancia la respuesta será de tipo subamortiguado, puesto que las raices son complejas conjugadas. Además el tiempo de asentamiento será similar, al tener todas la misma parte real. Al incrementarse negativamente la ganancia también lo hace la parte imaginaria, de modo que la frecuencia de las oscilaciones será cada vez mayor, al igual que el sobrepico.

Problema 8

Se sabe que las funciones de transferencia que relacionan las dos entradas y dos salidas de un proceso son:

$$G_{11} = \frac{2}{s+1} \qquad G_{12} = \frac{2}{s^2+3s+1} \qquad G_{21} = \frac{s-1}{s^2+4s+2} \qquad G_{22} = \frac{2}{3s+1}$$



Se desea conocer:

1) Para instalar dos controladores SISO, ¿cual será el mejor apareamiento de entradas y salidas?
2) ¿Seria aconsejable esa forma de regulación?
3) Suponiendo que se colocan reguladores proporcionales de ganancia unidad, ¿cual será la función de transferencia que relaciona la salida 1 con las consignas de ambos reguladores?

Solución

1) La medida de la interacción y la mejor forma de aparear entradas y salidas puede estudiarse con la matriz de ganancias relativas de Bristol. Para ello debe encontrarse previamente la matriz de ganancias.

Las ganancias entre las entradas y salidas pueden obtenerse a partir de las funciones de transferencia:

$$k_{11} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \frac{2}{s+1}\frac{1}{s}}{1} = 2\,; \qquad k_{12} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \frac{2}{s^2+3s+1}\frac{1}{s}}{1} = 2\,;$$

$$k_{21} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \frac{s-1}{s^2+4s+2}\frac{1}{s}}{1} = -0.5 \qquad k_{22} = \frac{\lim\limits_{s\to 0} s \frac{2}{3s+1}\frac{1}{s}}{1} = 2$$

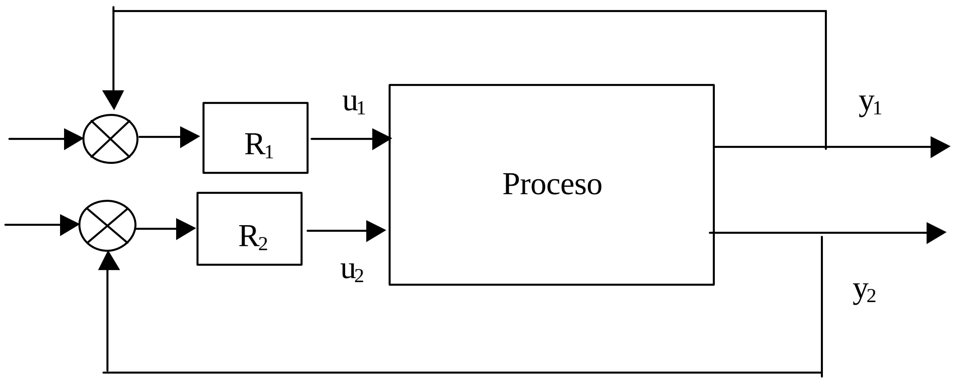
de modo que: $K = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix}$

Para calcular la RGA, calcularemos uno de sus elementos, por ejemplo λ_{11} y luego estimar los otros usando las propiedades de la RGA:

$$\lambda_{11} = \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} = \frac{2\quad 2}{2\quad 2-2(-0.5)} = 0.8 \qquad \lambda_{12} = 1-\lambda_{11} = 0.2;$$
$$\lambda_{21} = 1-\lambda_{11} = 0.2; \qquad \lambda_{22} = 1-\lambda_{21} = 0.8;$$

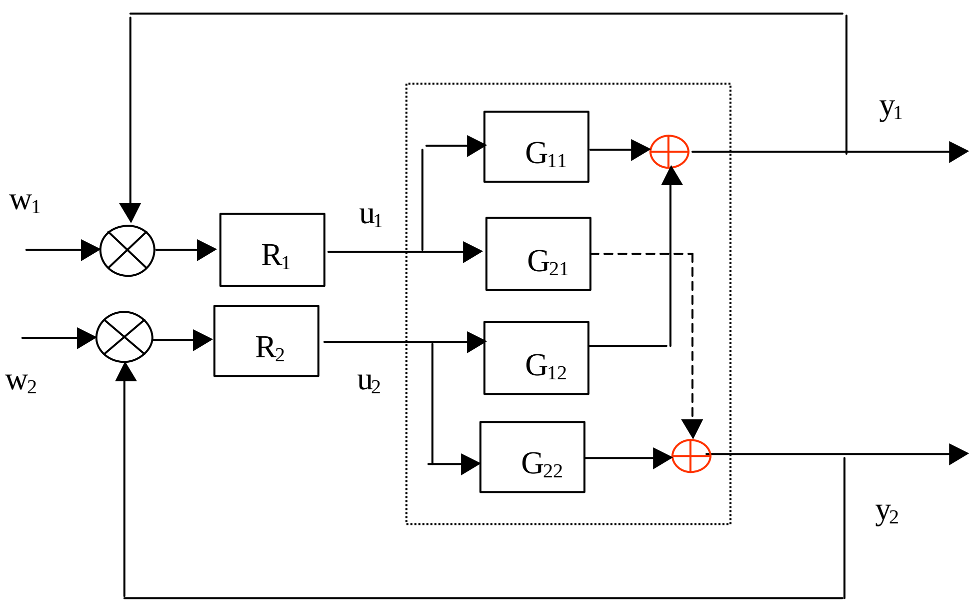
luego: $$RGA = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Ahora, claramente la mejor forma de asociar entradas y salidas es controlar la salida 1 con la entrada 1 y la salida 2 regularla con la entrada 2, puesto que el termino correspondiente de la RGA (0.8) es mas próximo a 1, con lo que la interacción entre los lazos resultantes será menor. La otra asociación, salida 1 regulada con la entrada 2 y salida 2 regulada con la entrada 1, tiene un valor de 0.2 en la RGA, lo cual quiere deciur que, como 0.2 = 2/10, hay un cambio de ganonciua del 500% en un lazo de esa asociación cuando el otro conmute de manual a automático y viceversa, lo cual no es admisible.



2) En este caso, el cambio en ganancia en un lazo cuando el otro conmuta entre automático y manual es, teniendo en cuenta que 0.8 =8/10 , de la misma proporción que pasar de 8 a 10, que es un cambio admisible y probablemente no seria necesario un controlador multivariable.

3) Para calcular esta función de transferencia, partiremos del diagrama de bloques:



Y operando:

$$\begin{aligned} y_1 &= G_{11}u_1 + G_{12}u_2 = \\ &= G_{11}R_1(w_1 - y_1) + G_{12}R_2(w_2 - y_2) \\ y_2 &= G_{21}u_1 + G_{22}u_2 = \\ &= G_{21}R_1(w_1 - y_1) + G_{22}R_2(w_2 - y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1}(w_2 - y_2) \\ y_2 &= \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2}(w_1 - y_1) + \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2 \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1}\left(w_2 - \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2}(w_1 - y_1) - \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2\right)$$

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{22}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_2$$

Ahora, sustituyendo R_1 y R_2 por K_{p1} y K_{p2}, así como dando valores a las funciones de transferencia G:

$$G_{11} = \frac{2}{s+1} \qquad G_{12} = \frac{2}{s^2+3s+1} \qquad G_{21} = \frac{s-1}{s^2+4s+2} \qquad G_{22} = \frac{2}{3s+1}$$

obtendremos la función de transferencia pedida.