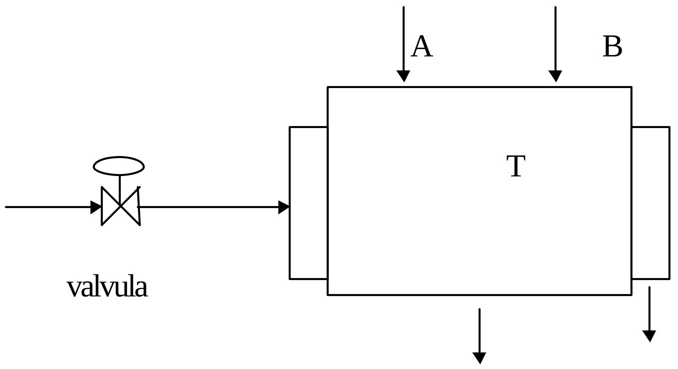
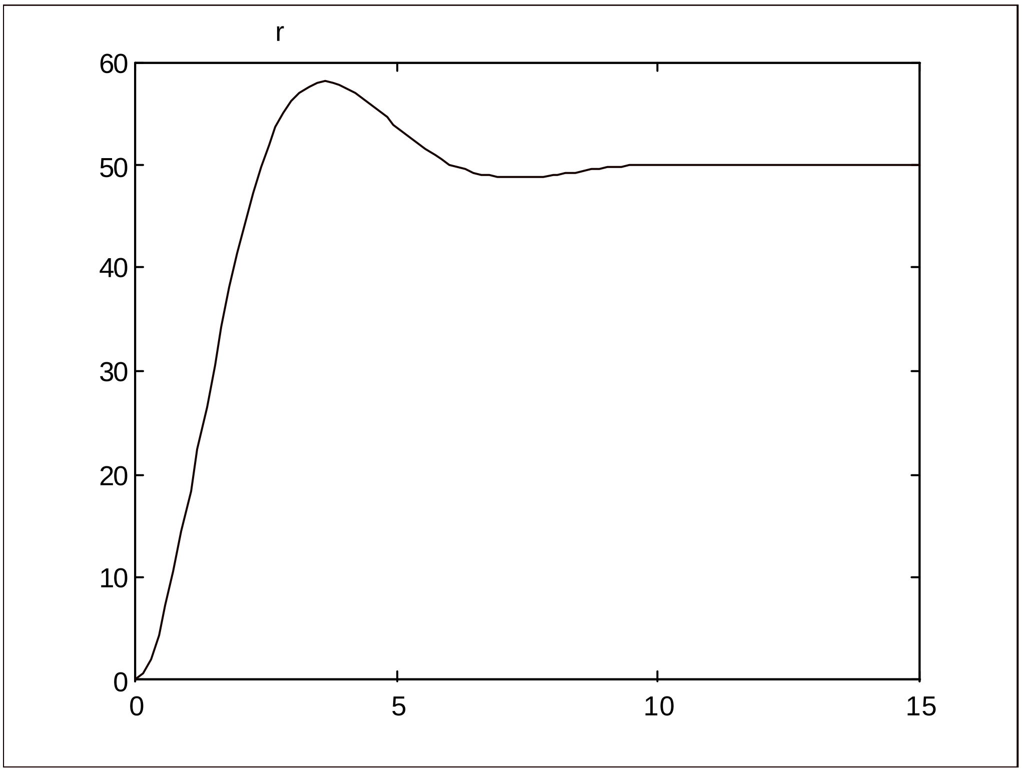
Problemas de “Control e Instrumentación de Procesos Químicos”
4º Curso de Ingenieria Química

Problema 5

En la figura puede verse un esquema de un reactor endotérmico donde se introducen dos productos A y B, que reaccionan para formar otro C, los cuales se mantienen notablemente constantes.



Se ha realizado un experimento consistente en aumentar la apertura de la válvula de admisión de vapor en un 10% y registrar el cambio en la temperatura del reactor cuando las demas variables estaban constantes, el cual puede verse en la gráfica, donde se supone que la temperatura del reactor inicialmente estaba en el valor marcado como 0. La escala de temperatura es en ºC y la temporal en minutos. El transmisor de temperatura estába calibrado en el rango 0-80 ºC.



Se pide:

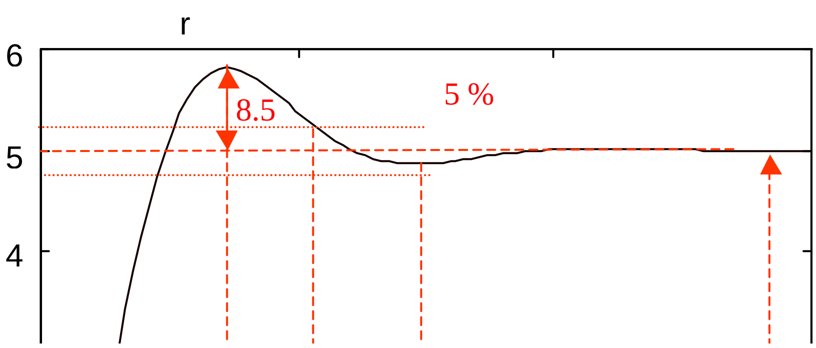
1) Calcular un modelo dinámico que relacione la temperatura del reactor con la apertura de la válvula, utilizando para la ganancia unidades %/%.
2) Calcular el tiempo de asentamiento y la frecuencia de oscilación y comparalas con los valores que pueden estimarse a partir del modelo.

3) Diseñar el regulador de temperatura mas sencillo que proporcione las siguientes características: sin error estacionario, sin o con muy poco sobrepico y con un tiempo de asentamiento del orden de 5 min.

Solución:

1) Dado que la única información es la respuesta a un ensayo en salto, utilizaremos dicha gráfica para deducir un modelo lineal aproximado. De la forma de la respuesta, con sobrepico y oscilación y sin retardo, se deduce que podemos escoger un modelo de segundo orden del tipo:

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}$$



La ganancia K se calcula mediante el cociente entre el cambio en temperatura en estado estacionario, 50ºC, y el cambio en la apertura de la válvula 10%. Como se piden unidades en %/%, debemos convertir los 50ºC a escala de % teniendo en cuenta que 80ºC son el 100% del transmisor.

K = (50 100 / 80) / 10 = 6.25 % / %

Para calcular el valor del amortiguamiento δ usaremos la medida del sobrepico. El valor del sobrepico es de 8.5 ºC y en % sobre el valor final: 8.5 100 /50 = 17 % y se sabe que la relación de este valor con el amortiguamiento viene dada por:

$$100e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

por tanto:

$$e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.17; \quad \ln(0.17) = \frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}; \quad (-1.772)^2 = \frac{\delta^2\pi^2}{1-\delta^2}$$

$$1.318\delta^2 = 0.318; \quad \delta = 0.491$$

Un valor similar de δ puede obtenerse de las gráficas %M / δ

Para calcular la frecuencia propia no amortiguada ω_n, usaremos el tiempo de pico. El tiempo de pico es de 3.53 min y se sabe que viene relacionado con los parámetros de la función de transferencia por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

por tanto:

$$3.53 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.491^2}}; \quad \omega_n = 1.02$$

y la función de transferencia resultante entre los cambios de temperatura y de posición de la valvula resulta ser en % / %:

$$\frac{6.5}{s^2 + s + 1.04}$$

2) El periodo de oscilación obtenido de la gráfica es aproximadamente de 2(7.5 – 3.53) = 7.94 min. Con lo que la frecuencia de oscilación será: $2\pi/7.94 = 0.79$ rad/min. Siendo dificil hacer las medidas con precisión en la gráfica por la forma plana de la oscilación descendente.

Del mismo modo, el tiempo de asentamiento del 5% obtenido de la gráfica es aproximadamente de 5.5 min.

Los valores calculados del modelo son:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} = 1.02\sqrt{1-0.49^2} = 0.89\text{rad}/\min$$
$$\delta\omega_n = 0.49\,1.02 = 0.5; \quad 3/0.5 = 6\min$$

que son valores próximos a los medidos. En particular, téngase en cuenta que el cálculo del tiempo de asentamiento mediante $3/\delta\omega_n$ en sistemas de segundo orden es solo una expresión aproximada. También debe tenerse en cuenta que la respuesta de la gráfica se está aproximando por la de un sistema de segundo orden, pero en el enunciado no se dice que sea exactamente un sistema de segundo orden.

3) Para diseñar el regulador pedido debemos escoger en primer lugar su tipo. Teniendo en cuenta que el proceso no tiene integradores, para eliminar el error estacionario se necesitará un regulador PI o PID. Por otra parte, dado el tipo de función de transferencia y las especificaciones de diseño, no es posible aplicar las reglas de Ziegler-Nichols ni las tablas de Rovira, Lopez o Morari. Un procedimiento de diseño aplicable es obtener un margen de fase (relacionado con el sobrepico) a una frecuencia dada (relacionada con la velocidad de respuesta). Si se desea que el sistema en lazo cerrado tenga un ligero o ningún sobrepico puede tomarse un margen de fase de unos 55º. Para estimar la frecuencia a la que se quiere obtener este margen de fase para el conjunto proceso-regulador, dado que el tiempo de asentamiento requerido es un poco inferior al de lazo abierto, tomaremos una frecuencia ligeramente superior a la de corte en lazo abierto.

Dado que en nuestro caso la función de transferencia es:

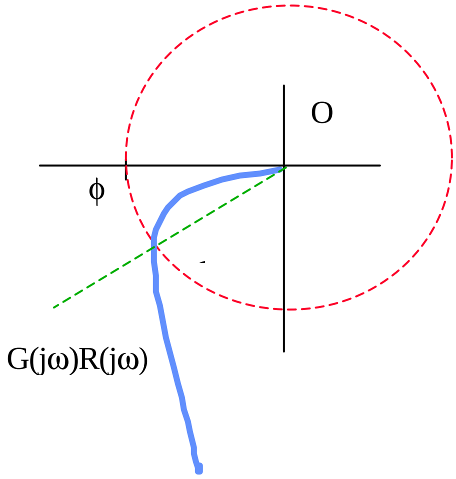
$$\frac{6.5}{s^2 + s + 1.04} = \frac{6.25\ 1.04}{s^2 + s + 1.04}$$

y sabemos que para una función de transferencia:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}$$

la frecuencia de corte está aproximadamente en la frecuencia ω_n, podemos hacer el diseño respecto a esta función de transferencia para la que podemos estimar dicha frecuencia, y dividir luego la ganancia del regulador resultante por 6.25 .No obstante, dado que el valor de la ganancia del proceso solo interviene en el denominador de la fórmula de cálculo de la ganancia K_p del regulador, (como puede verse en las fórmulas que figuran mas abajo) es igual usar para ellas la función de transferencia del proceso que incluye la ganancia 6.25 y no dividir despues por este factor. En el diseño, por tanto escogeremos una frecuencia ligeramente superior a $\omega_n = 1.02$, por ejemplo $\omega_f = 1.2$ rad/min.

En el caso de un PI, se trata de conseguir unos valores de la ganancia y el tiempo integral del regulador tales que el margen de fase de G(jω)R(jω) sea 55º a la frecuencia 1.2



La solución, de acuerdo a la teoría, viene dada por las expresiones:

$$\theta = \pi - \phi + \arg[G(j\omega_f)]$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_f \, tg\theta}$$

$$K_p = \frac{\cos\theta}{|G(j\omega_f)|}$$

Donde

$$|G(j\omega_f)| = \frac{6.5}{|(j\omega_f)^2 + j\omega_f + 1.04|} = \frac{6.5}{|(j1.2)^2 + j1.2 + 1.04|} = 5.14$$

$$\arg[G(j\omega_f)] = -\arg[(j1.2)^2 + j1.2 + 1.04] = -1.89 \text{ rad}$$

$$\theta = \pi - \frac{55\pi}{180} - 1.89 = 0.29 \text{ rad}$$

$$T_i = \frac{1}{1.2tg(0.29)} = 2.8\min \qquad K_p = \frac{\cos 0.29}{5.14} = 0.19 \ \%/\%$$

Una vez obtenidos los parámetros del regulador PI, y dado que no existe una relación exacta para el sistema resultante de tercer orden con un cero, con el tiempo de asentamiento, seria conveniente comprobar en simulación que el sistema en lazo cerrado obtenido cumple las especificaciones.

Otra alternativa de diseño es un procedimiento de síntesis directa. Si tomamos como comportamiento deseado en lazo cerrado una función de transferencia de primer orden (sobreamortiguada) con ganancia unidad y constante de tiempo λ = 5/3 = 1.66, podemos calcular el regulador R(s) que da en lazo cerrado esa función M(s):

$$M(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} = \frac{1}{1.66s + 1} \qquad G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{6.5}{s^2 + s + 1.04}$$

$$R(s) = \frac{M(s)}{G(s)(1 - M(s))} = \frac{\frac{1}{\lambda s + 1}}{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}(1 - \frac{1}{\lambda s + 1})} = \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{K\omega_n^2(\lambda s + 1 - 1)} =$$

$$= \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{K\omega_n^2 \lambda s} = \frac{s^2/\omega_n^2 + (2\delta/\omega_n)s + 1}{K\lambda s} =$$

$$= \frac{2\delta}{\omega_n K\lambda} \frac{(2\delta/\omega_n)(1/2\delta\omega_n)s^2 + (2\delta/\omega_n)s + 1}{(2\delta/\omega_n)s}$$

$$K_p = \frac{2\delta}{\omega_n K\lambda} \quad T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} \quad T_d = \frac{1}{2\delta\omega_n}$$

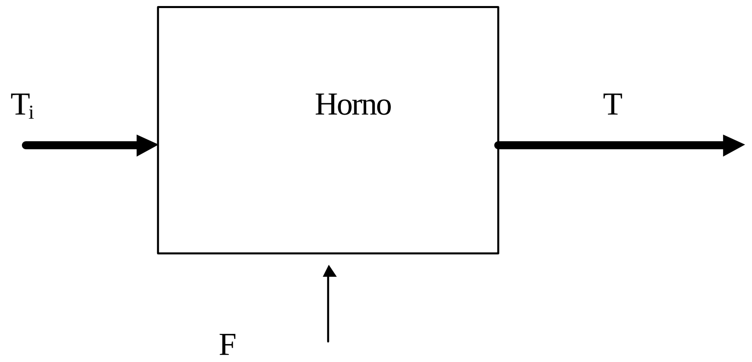
$$\text{PID ideal} = \frac{K_p(T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{T_i s}$$

Igualando términos a un PID ideal

y sustituyendo: K_p = 0.093, T_i = 0.96 T_d = 0.998

Problema 6

El proceso de la figura representa un horno de calentamiento de un material, que entra a temperatura T_i y debe salir a temperatura T. En el horno se puede manipular el flujo F de elemento calefactor para hacer que la temperatura final T del material alcance los valores deseados.



Se sabe que la relación entre la temperatura T, la temperatura de entrada del material T_i y el flujo F viene dada por:

$$(5+3F)\frac{dT}{dt} + 2T^2 = 3FT + T_i$$

con T y Ti en ºC, F en Kg/min y el tiempo en minutos, y que cuando el sistema esta en estado estacionario a 40ºC la temperatura de entrada en de 10ºC. Se pide:

1) Obtener la función de transferencia del sistema en ese punto de trabajo.
2) Para la regulación del sistema se utiliza un regulador PI de ganancia 0.1 %/ºC y tiempo integral 20 segundos. Se conoce que la relación entre la señal de control U del regulador en % y el flujo F en Kg/min es F=U. Dibujar el diagrama de regulación del proceso y el diagrama de bloques correspondiente en lazo cerrado, y estudiar la estabilidad del sistema.
3) Calcular la ganancia del regulador para que el sistema se coloque en el límite de estabilidad.
4) Para un cambio en rampa en la temperatura T_i de 2ºC/min. calcular el error estacionario con los parámetros de sintonía del apartado 2).
5) Si los cambios en T_i son significativos, ¿Como diseñarias un compensador en adelanto que mejorara el funcionamiento del sistema?. Calcúlalo y dibuja el esquema correspondiente.

Solucion:

1) Dado que el modelo del sistema es no lineal, para obtener la función de transferencia entre la salida T, la entrada F y la posible perturbación T_i debemos linealizar dicho modelo. El punto de linealización, de acuerdo al enunciado, es el punto de equilibrio que verifica:

$$2T^2 = 3FT + T_i; \qquad 2\,40^2 = 3F_0\,40 + 10; \qquad F_0 = 3190/120 = 26.6\ \mathrm{Kg/min}$$

con lo que dicho punto de linealización resulta ser:

T_0 = 40ªC, F_0 = 26.6 Kg/min, T_{i0} = 10ªC, $\dot{T}_0 = 0$

donde hemos usado la notación $\dot{T} = \dfrac{dT}{dt}$

La ecuación del modelo es función de F, T_i, T y su derivada $\dot{T}$, y puede linealizarse usando una expansión de Taylor:

$$(5+3F)\frac{dT}{dt} + 2T^2 - 3FT - T_i = 0 \qquad f(\dot{T}, T, F, T_i) = 0$$

la linealización es una expresión del tipo : $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{T}}\right|_0 \Delta\dot{T} + \left.\dfrac{\partial f}{\partial T}\right|_0 \Delta T + \left.\dfrac{\partial f}{\partial F}\right|_0 \Delta F + \left.\dfrac{\partial f}{\partial T_i}\right|_0 \Delta T_i = 0$

donde $\Delta\dot{T} = \dot{T} - \dot{T}_0; \quad \Delta T = T - T_0; \quad \Delta F = F - F_0; \quad \Delta T_i = T_i - T_{i0};$ con lo que :

$$(5+3F_0)\Delta\dot{T} + (4T_0 - 3F_0)\Delta T + (3\dot{T}_0 - 3T_0)\Delta F - \Delta T_i = 0$$

$$84.8\frac{d\,\Delta T}{dt} + 80.2\Delta T = 120\Delta F + \Delta T_i$$

Tomando ahora transformadas de Laplace a ambos lados de esta ecuación linealizada, y teniendo en cuenta que, si en el instante inicial el proceso está en equilibrio, los valores iniciales de los incrementos serán nulos:

$$84.8L\left\{\frac{d\,\Delta T}{dt}\right\} + 80.2L\{\Delta T\} = 120L\{\Delta F\} + L\{\Delta T_i\}$$

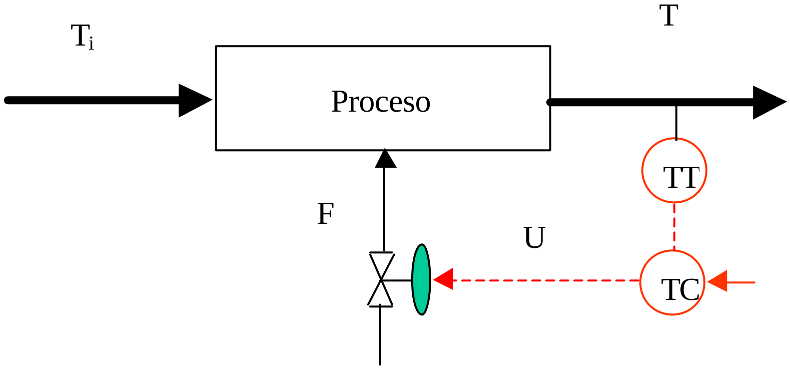
$$84.8sT(s) + 80.2T(s) = 120F(s) + T_i(s) \ \text{ donde } T(s) = L\{\Delta T\},\ F(s) = L\{\Delta F\},\ T_i(s) = L\{\Delta T_i\}$$

$$(84.8s + 80.2)T(s) = 120F(s) + T_i(s)$$

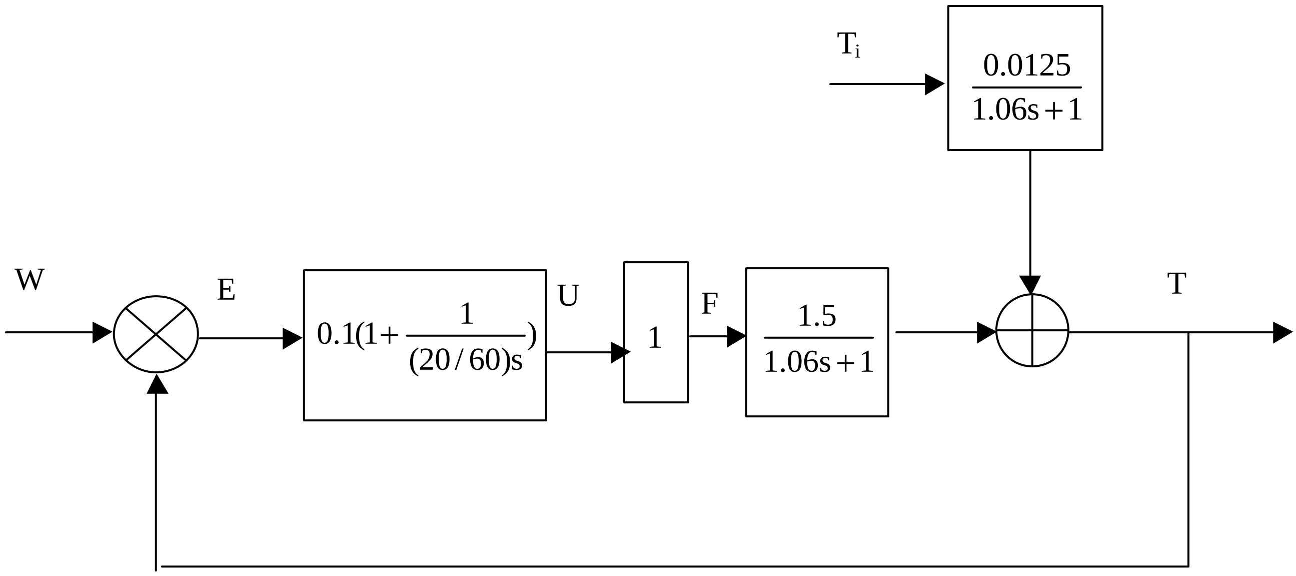
y la función de transferencia resulta ser:

$$T(s) = \frac{120}{84.8s + 80.2}F(s) + \frac{1}{84.8s + 80.2}T_i(s) = \frac{1.5}{1.06s + 1}F(s) + \frac{0.0125}{1.06s + 1}T_i(s)$$

2) El diagrama de regulación es:



y el diagrama de bloques:



La función de transferencia en lazo cerrado puede calcularse como:

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{G(s)R(s)}{1+G(s)R(s)}W(s) + \frac{D(s)}{1+G(s)R(s)}T_i(s) = \\
&= \frac{\frac{1.5}{1.06s+1}\frac{0.1s+0.3}{s}}{1+\frac{1.5}{1.06s+1}\frac{0.1s+0.3}{s}}W(s) + \frac{\frac{0.0125}{1.06s+1}}{1+\frac{1.5}{1.06s+1}\frac{0.1s+0.3}{s}}T_i(s) = \\
&= \frac{0.15s+0.45}{1.06s^2+1.15s+0.45}W(s) + \frac{0.0125s}{1.06s^2+1.15s+0.45}T_i(s)
\end{aligned}
$$

y la estabilidad en lazo cerrado puede estudiarse calculando los polos en lazo cerrado, esto es, las raices de:

$$1.06s^2 + 1.15s + 0.45 = 0; \qquad s = \frac{-1.15 \pm \sqrt{1.15^2 - 4\;1.06\;0.45}}{2\;1.06} = -0.54 \pm j0.36$$

como la parte real de ambos polos es negativa, el sistema será estable en lazo cerrado.

3) Si la ganancia del regulador fuera variable en lugar de 0.1, la función de transferencia en lazo cerrado seria:

$$T(s)=\frac{\frac{1.5}{1.06s+1}K_p\frac{s+3}{s}}{1+\frac{1.5}{1.06s+1}K_p\frac{s+3}{s}}W(s)+\frac{\frac{0.0125}{1.06s+1}}{1+\frac{1.5}{1.06s+1}K_p\frac{s+3}{s}}T_i(s)=$$

$$=\frac{1.5K_ps+4.5K_p}{1.06s^2+(1+1.5K_p)s+4.5K_p}W(s)+\frac{0.0125s}{1.06s^2+(1+1.5K_p)s+4.5K_p}T_i(s)$$

y la estabilidad vendria dada en función de las raices de:

$$1.06s^2+(1+1.5K_p)s+4.5K_p=0;\quad s=\frac{-1-1.5K_p\pm\sqrt{(1+1.5K_p)^2-4\;1.06\;\;4.5K_p}}{2\;\;1.06}$$

las raices serán reales si se verifica:

$$(1+1.5K_p)^2-4\;1.06\;\;4.5K_p\geq 0;\quad \text{o sea}:\quad 1+2.25K_p^2-16.08K_p=0$$

$$K_p=\frac{16.08\pm\sqrt{16.08^2-4\;\;2.25\;\;1}}{4.5}=\frac{16.08\pm 15.79}{4.5}=7.08;\quad 0.0627$$

o sea entre K_p = 0.0627 y 7.08 las raices s serán imaginarias y la condición de estabilidad sería que la parte real de las mismas fuera negativa, o sea debería cumplirse:

$-1-1.5K_p\leq 0;\quad K_p\geq -2/3$ de modo que en este rango de valores de K_p el sistema seria siempre estable. Fuera del rango de K_p [0.0627, 7.08], las raices s en lazo cerrado son reales y la condición de estabilidad es:

$$-1-1.5K_p\pm\sqrt{(1+1.5K_p)^2-4\;1.06\;\;4.5K_p}\leq 0;$$

para lo cual el valor absoluto del radicando debe ser menor en valor absoluto que $1+1.5K_p$ lo cual se cumple para cualquier K_p positivo, de modo que el sistema sera estable para cualquier $K_p>0$

Alternativamente podría haberse usado el criterio de Root para $1.06s^2+(1+1.5K_p)s+4.5K_p=0$ que conduce a:

$$\begin{array}{cc} 1.06 & 4.5K_p \\ 1+1.5K_p & \end{array}\qquad 4.5K_p>0\;;\;\; 1+1.5K_p>0\quad \text{o sea}\;\; K_p>0$$

4) El error estacionario ante un cambio en rampa en T_i de 2ºC/min puede calcularse mediante la correspondiente función de transferencia:

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)R(s)}W(s)-\frac{D(s)}{1+G(s)R(s)}T_i(s)=$$

$$=\frac{-\dfrac{0.0125}{1.06s+1}}{1+\dfrac{1.5}{1.06s+1}\,\dfrac{0.1s+0.3}{s}}T_i(s)=\frac{-0.0125s}{(1.06s^2+1.15s+0.45)}\,\frac{2}{s^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{-0.0125s}{(1.06s^2+1.15s+0.45)}\,\frac{2}{s^2}=\frac{-0.0125\quad 2}{0.45}=-0.055$$

5) Un compensador en adelanto puede utilizarse, puesto que la dinámica de la salida ante cambios en la perturbación T_i no es mas rápida que ante cambios en la variable manipulada U. La función de transferencia del compensador vendrá dada por:

$$G_F(s)=\frac{-D(s)}{G(s)}=\frac{\dfrac{0.0125}{1.06s+1}}{\dfrac{1.5}{1.06s+1}}=-0.008$$

y corresponderia al siguiente esquema: