



Controladores MPC

Prof. Cesar de Prada

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad de Valladolid, España

e-mail: prada@autom.uva.es

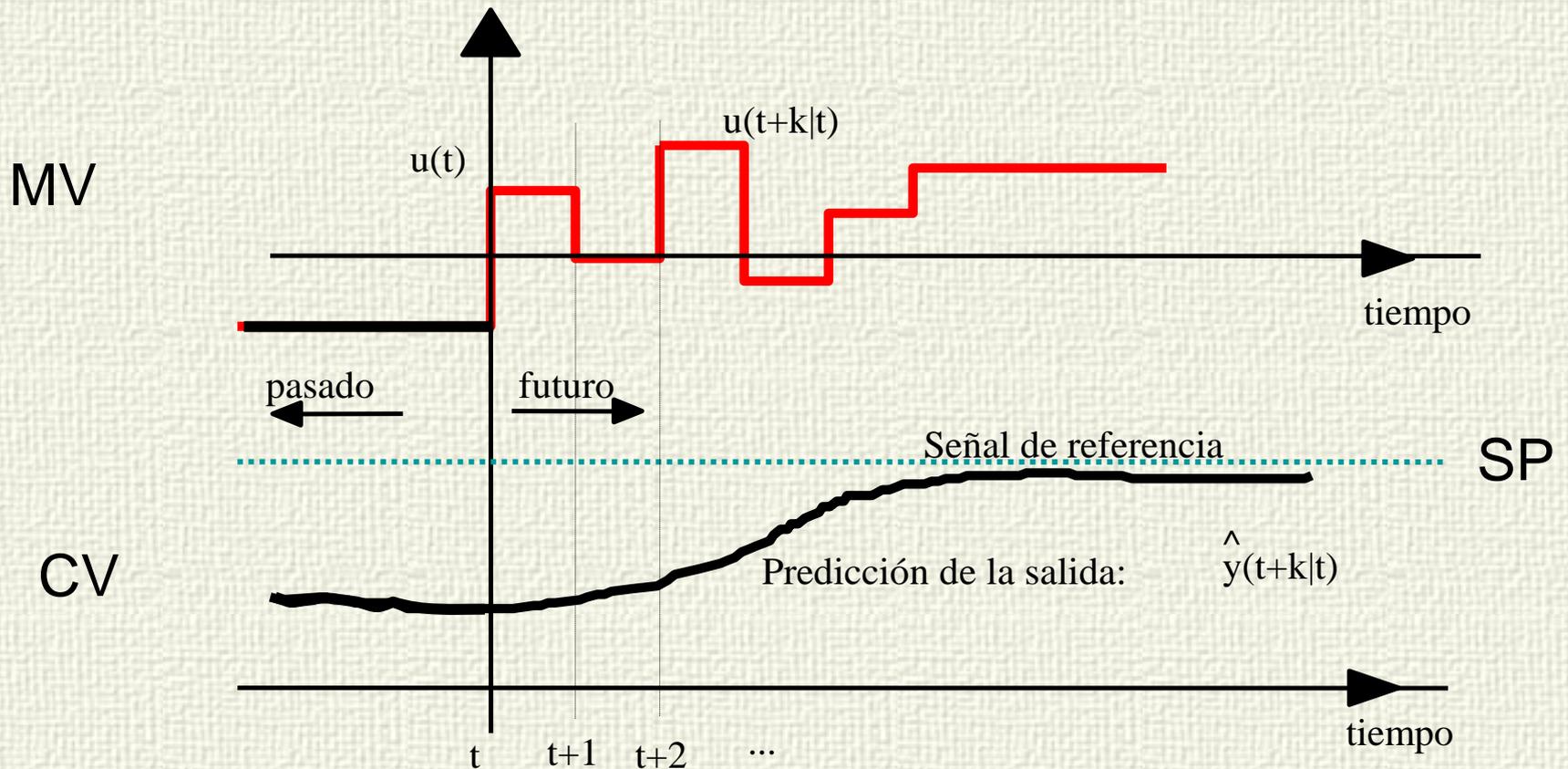


Índice

- ✓ Controladores Predictivos clásicos
 - DMC
 - GPC
 - EPSAC
 - PFC, Monoreg
- ✓ Elementos de MPC
 - Cálculo numérico
 - Perturbaciones medibles
 - Restricciones, Factibilidad
 - Formulación Multivariable
 - Variables de estado, Errores estacionarios
 - Optimización económica



Control Predictivo





Diferentes estrategias de control

✓ Modelos lineales

- GPC
- DMC
- EPSAC
- Monoreg
- ...

Consideración explícita de restricciones

Compensación explícita de perturbaciones medibles

QP, NLP, MINLP

✓ No lineales

- NPC, Modelos Físicos, Modelos Híbridos
- NEPSAC,...

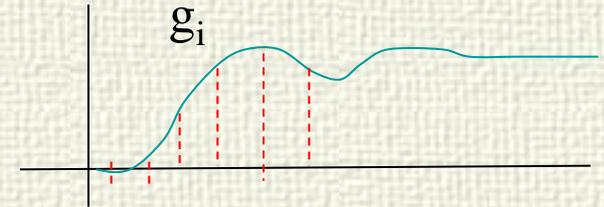


DMC Dynamic Matrix Control

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-1)$$

Modelo: respuesta salto + perturbación

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + n(t)$$



Predicciones:

$$y(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + n(t+j)$$

Modelo de perturbación:

$$n(t+j) = n(t) = y_p(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

Predicciones:

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + y_p(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$



DMC, Dynamic Matrix Control

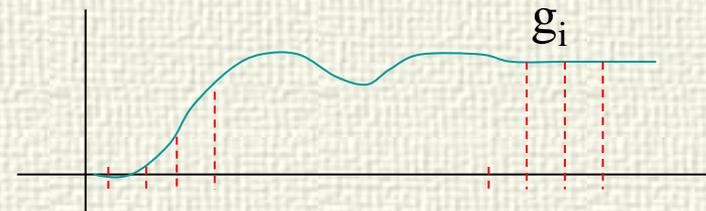
$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + y_p(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) =$$

$$= y_p(t) + g_{j+1} \Delta u(t-1) + g_{j+2} \Delta u(t-2) + \dots - g_1 \Delta u(t-1) - g_2 \Delta u(t-2) - \dots$$

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i)$$

En sistemas asintóticamente estables:



$$g_{j+i} - g_i \cong 0 \quad d_{j+i} - d_i \cong 0 \quad i > N, \quad j = N1, \dots, N2$$

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i)$$

Respuesta libre del sistema
en t



DMC, Dynamic Matrix Control

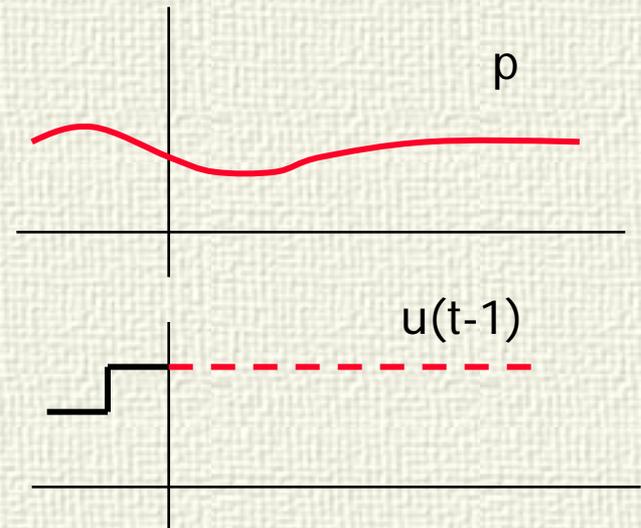
Predicciones: $\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + p_j$ Respuesta forzada + libre

$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j) + p_j$$

$$G_j(q^{-1}) = g_1 q^{-1} + \dots + g_j q^{-j}$$

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i)$$

p respuesta libre

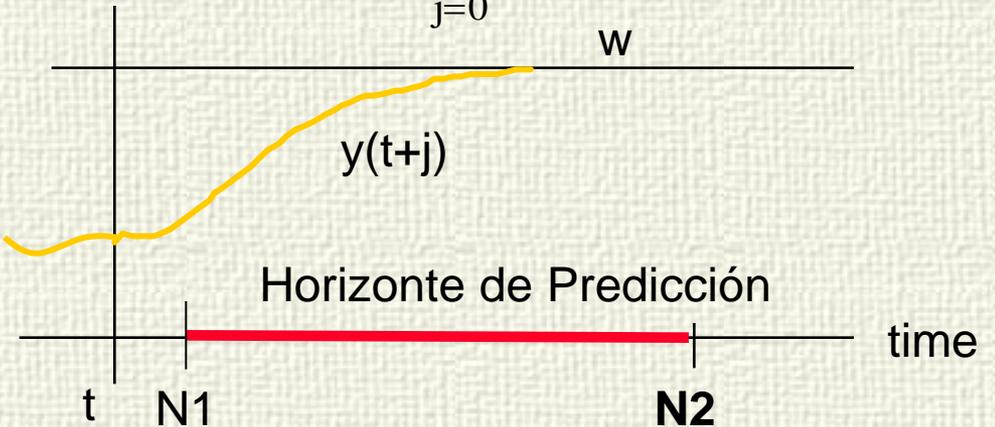




DMC, elección óptima de u

$$\text{Min : } J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

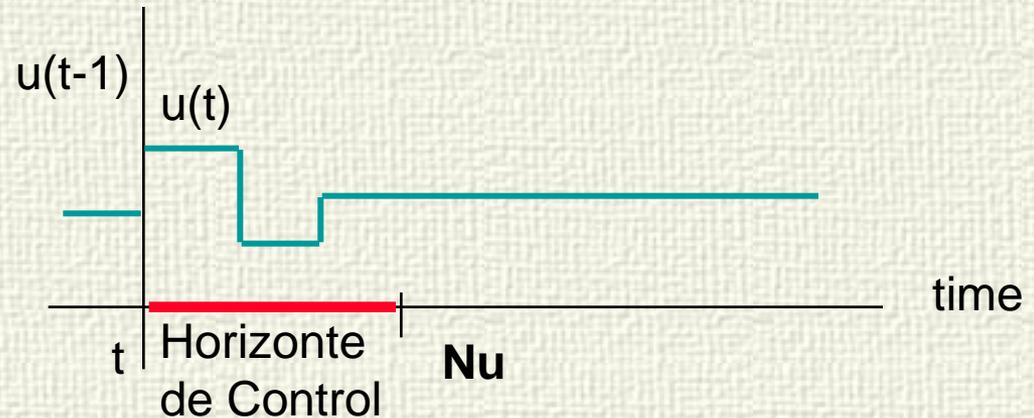
$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j$$



Estructura del control:

$$\Delta u(t+j) = 0 \quad j \geq Nu$$

Nu control horizon





DMC

$$\min_{\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$
$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j$$

Puede formularse en forma matricial:

$$\Delta \mathbf{u}(t)' = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+Nu-1)]$$
$$\mathbf{e}_0' = [w(t+N1) - p_{N1}, w(t+N1+1) - p_{N1+1}, \dots, w(t+N2) - p_{N2}]$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N1} & \dots & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{N1+1} & \dots & g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{N2-Nu+1} \end{bmatrix}$$

$$J = \Delta \mathbf{u}'(t) [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}(t) - 2\mathbf{e}_0' \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{e}_0' \mathbf{e}_0$$



DMC

$$J = \Delta \mathbf{u}'(t) [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}(t) - 2\mathbf{e}_0' \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{e}_0' \mathbf{e}_0$$

Si no hay restricciones:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$$2[\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u} - 2\mathbf{G}'\mathbf{e}_0 = 0$$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'\mathbf{e}_0$$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'(\mathbf{w} - \mathbf{p}_j)$$

Acción Integral

Sintonía: Horizontes, β

Compensación de retardos

Sistemas estables en lazo abierto

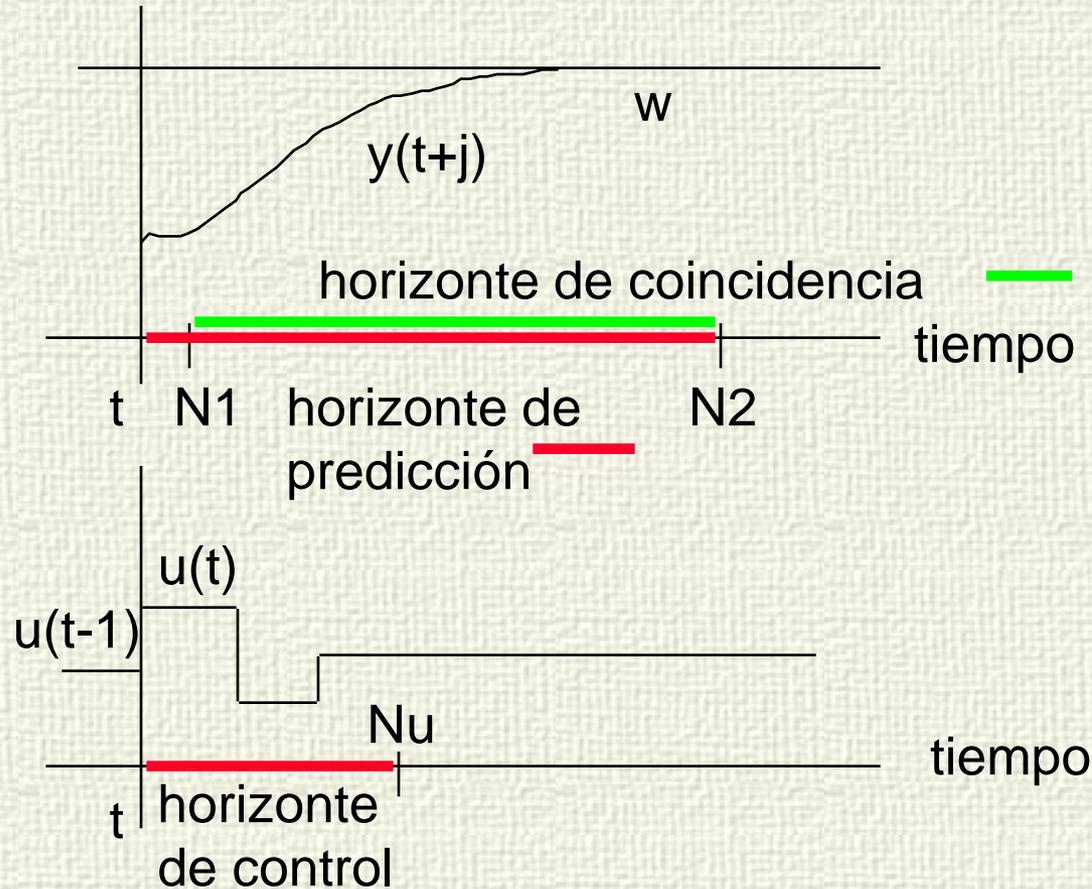


Parámetros DMC

$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

β Factor de peso
Move supresion factor

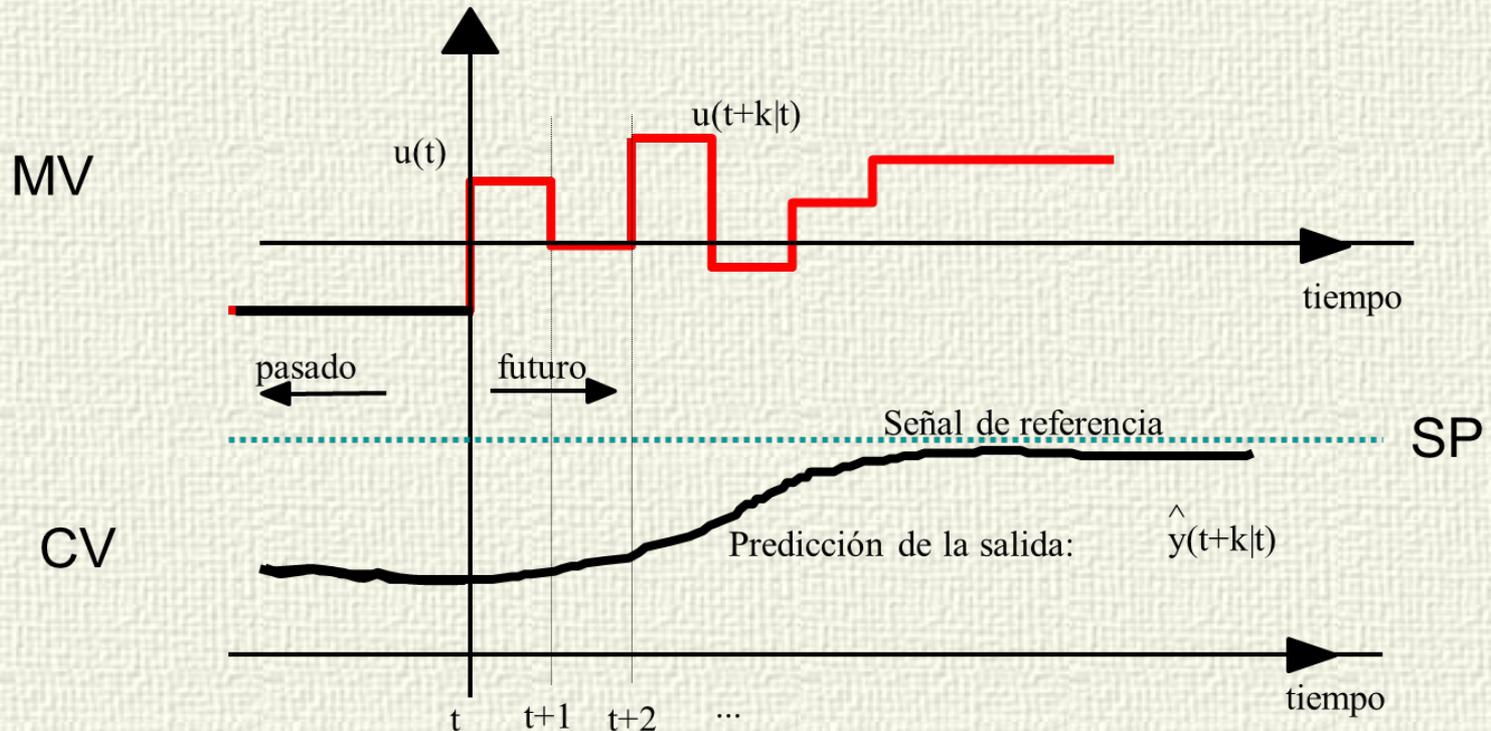
Δu control moves





¿Como escoger los parámetros?

$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$





DMC offset

DMC predicciones: $\hat{y}(t + j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t + j) + p_j$

En estado estacionario: $\hat{y} = p_{ss}$

y como
$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i)\Delta u(t-i) \Rightarrow p_{ss} = y_p$$
$$\Rightarrow \hat{y} = y_p$$

Las predicciones del estado estacionario son no sesgadas y, si la optimización lleva las predicciones del modelo a w , entonces la salida del proceso y_p será igual a la referencia w , proporcionando error estacionario nulo



EPSAC



$$y(t) = z(t) + n(t)$$

$$y(t + j) = z(t + j) + n(t + j)$$

$$n(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \xi(t) \quad \xi \text{ Ruido blanco}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_c q^{-c}$$

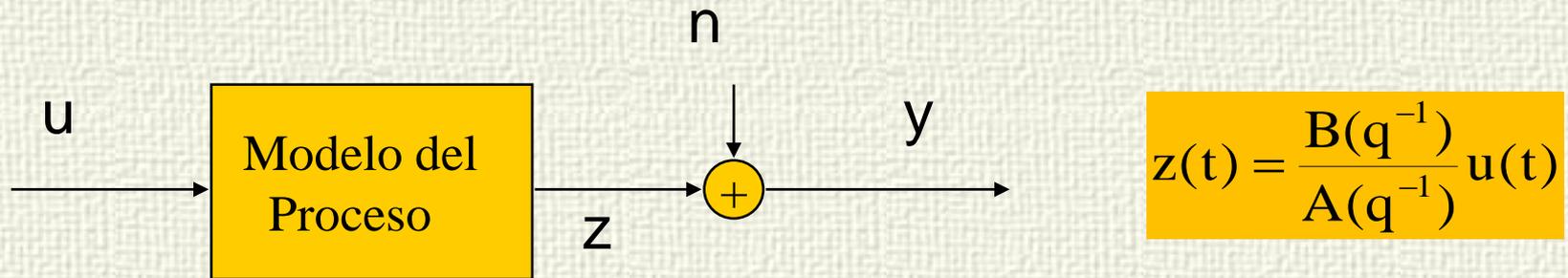
$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + \dots + d_d q^{-d}$$

$z(t)$, no medido, calculado
con cualquier modelo

$$z(t) = f(z(t-1), \dots, z(t-n), u(t), \dots, u(t-m))$$



EPSAC respuesta determinista



$$z(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t)$$

$$z(t) = -a_1 z(t-1) - \dots - a_n z(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

$$z(t+j) = -a_1 z(t+j-1) - \dots - a_n z(t+j-n) + b_1 u(t+j-1) + \dots + b_m u(t+j-m)$$

Función de las acciones de control futuras y pasadas



EPSAC Predicciones del ruido

$n(t)$ puede estimarse en t a partir de: $n(t) = y(t) - z(t)$

Para calcular las predicciones futuras $n(t+j)$ con información hasta t , usaremos el modelo y una técnica de filtrado para estimar el ruido blanco ξ , consistente en aplicar el filtro inverso D/C a n . Si llamamos $e(t)$ a la estimación de $\xi(t)$:

$$n(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \xi(t)$$

$$e(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} n(t)$$

$$e(t) = -c_1 e(t-1) - c_2 e(t-2) - \dots + n(t) + d_1 n(t-1) + \dots$$

Los valores presente y pasados de $e(t)$ pueden estimarse mediante esta expresión, mientras que para los valores futuros, al ser la estimación de un ruido blanco, puede hacerse $e(t+j) = 0$



EPSAC Predicciones del ruido

Entonces $n(t+j)$ puede estimarse mediante:
$$n(t+j) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t+j)$$

$$\hat{n}(t+j) = -d_1 \hat{n}(t+j-1) - d_2 \hat{n}(t+j-2) - \dots + e(t+j) + c_1 e(t+j-1) + c_2 e(t+j-2) + \dots$$

Con $e(t+j) = 0$ para $j \geq 1$, esto es:

$$\hat{n}(t+1) = -d_1 \hat{n}(t) - d_2 \hat{n}(t-1) - \dots + c_1 e(t) + c_2 e(t-1) + \dots$$

$$\hat{n}(t+2) = -d_1 \hat{n}(t+1) - d_2 \hat{n}(t) - \dots + c_2 e(t) + c_3 e(t-1) + \dots$$

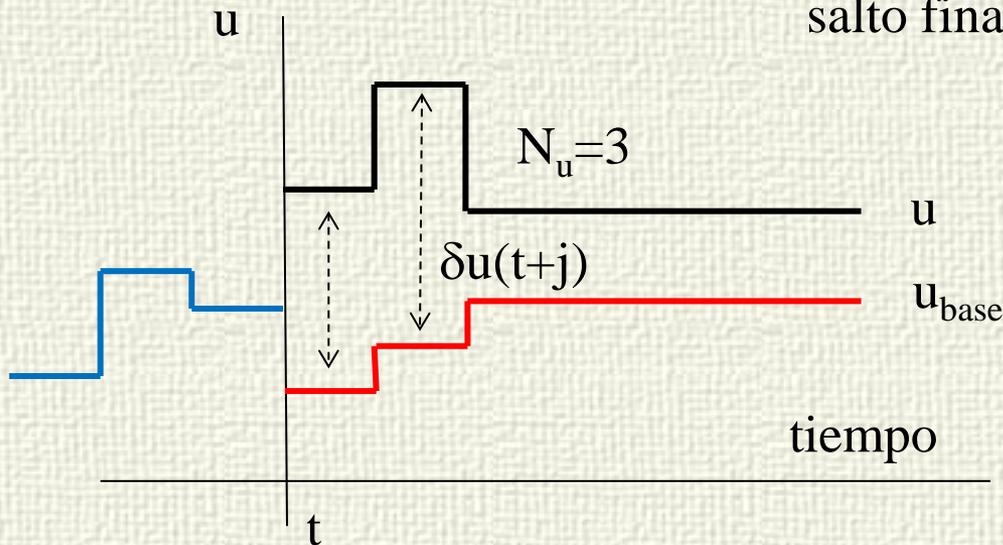
...

$$\hat{y}(t+j) = z(t+j) + \hat{n}(t+j)$$



EPSAC

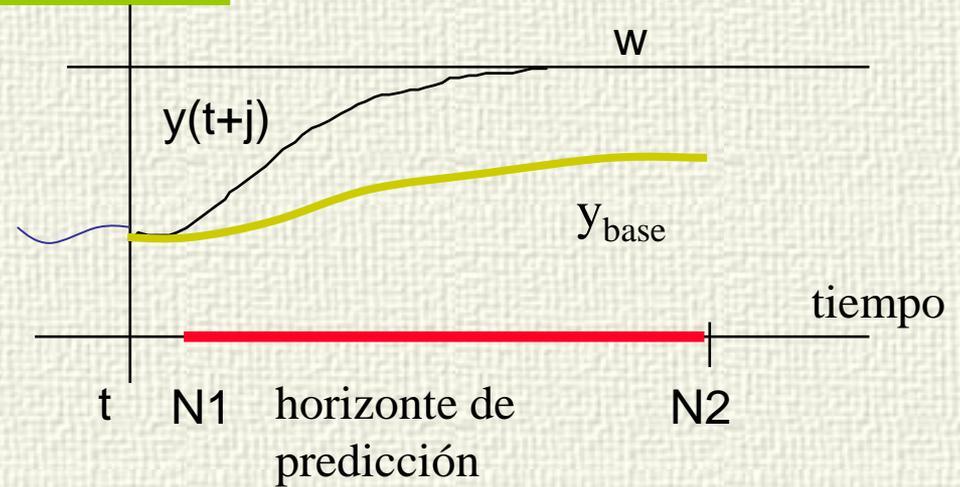
Cualquier señal de entrada u futura puede considerarse como suma de un valor fijo u_{base} (que puede ser el calculo hecho en el periodo de muestreo anterior) y una serie de cambios δu (impulsos en cada periodo de muestro mas un salto final en N_u)





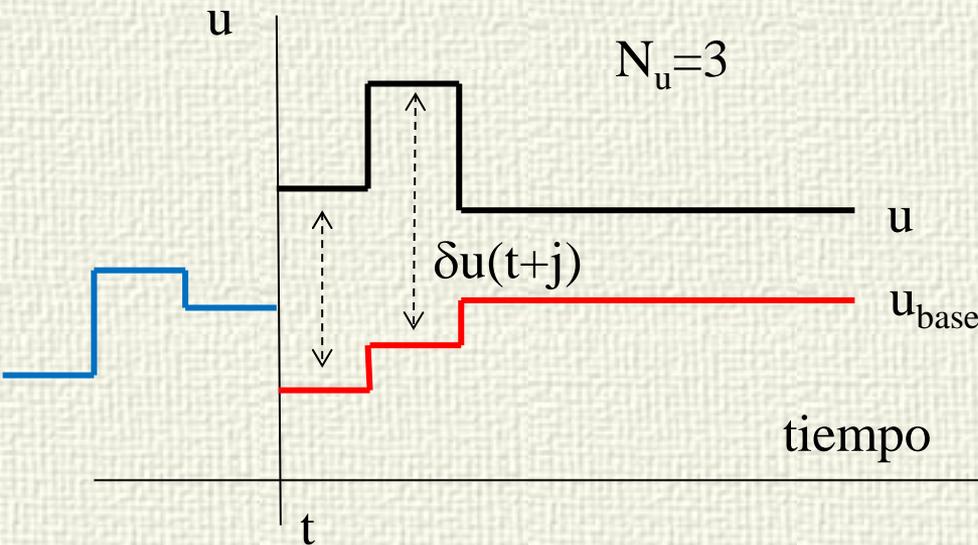
EPSAC

La respuesta del modelo a una entrada u puede considerarse como suma de dos efectos: el de u_{base} y el de los cambios δu futuros



$$\begin{aligned}\hat{y}(t+j) &= z(t+j) + \hat{n}(t+j) = \\ &= y_{base}(t+j) + y_{opt}(t+j)\end{aligned}$$

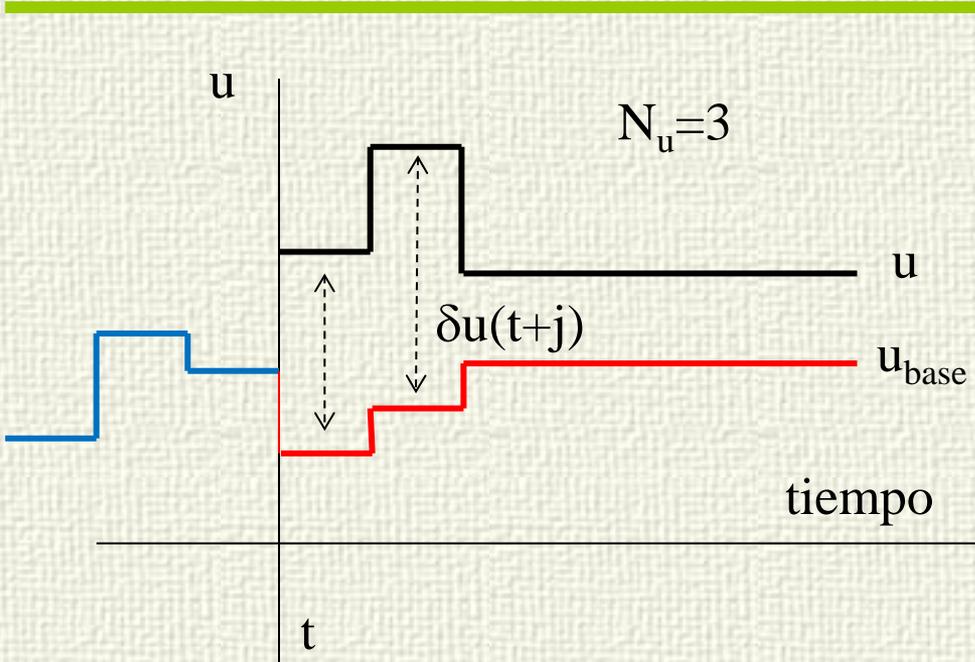
$y_{opt}(t+j)$ es la respuesta desde condiciones nulas a los impulsos $\delta(t+j)$ en $t+j$ y el salto final $\delta(t+N_u-1)$ en $t+N_u-1$



u_{base} puede ser cualquier acción futura y se hace fija. y_{base} es la respuesta a u_{base}

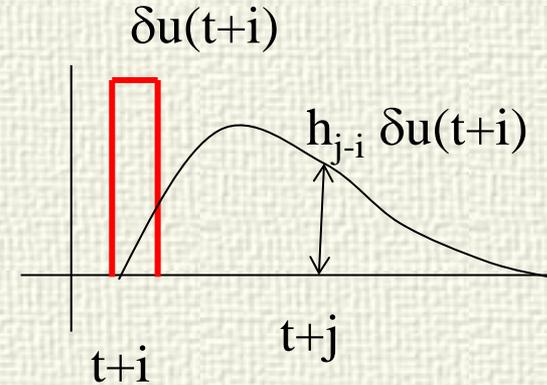


EPSAC



y_{opt} en $t+j$ sera la suma de los efectos producidos en ese instante por todos los impulsos δu y el salto final en $t+N_u - 1$

$$\hat{y}_{opt}(t+j) = h_j \delta u(t) + h_{j-1} \delta u(t+1) + \dots + g_{j-N_u+1} \delta u(t+N_u-1)$$



Un impulso de amplitud $\delta u(t+i)$ en el instante $t+i$ produce un efecto en la salida en el instante $t+j$ igual a $h_{j-i} \delta u(t+i)$, con h_{j-i} el correspondiente elemento de la respuesta impulsional. (g_k respuesta salto)



EPSAC

En forma matricial: $Y = Y_{\text{base}} + Y_{\text{opt}}$

$$Y = Y_{\text{base}} + GU$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(t + N_1) \\ \hat{y}(t + N_1 + 1) \\ \vdots \\ \hat{y}(t + N_2) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_{\text{base}}(t + N_1) \\ \hat{y}_{\text{base}}(t + N_1 + 1) \\ \vdots \\ \hat{y}_{\text{base}}(t + N_2) \end{bmatrix}}_{Y_{\text{base}}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} h_{N_1} & h_{N_1-1} & \cdots & h_{N_1-N_u+2} & | & g_{N_1-N_u+1} \\ h_{N_1+1} & h_{N_1} & \cdots & h_{N_1-N_u+3} & | & g_{N_1-N_u+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ h_{N_2} & h_{N_2-1} & \cdots & h_{N_2-N_u+2} & | & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t + N_u - 1) \end{bmatrix}}_U$$



EPSAC: Función de costo

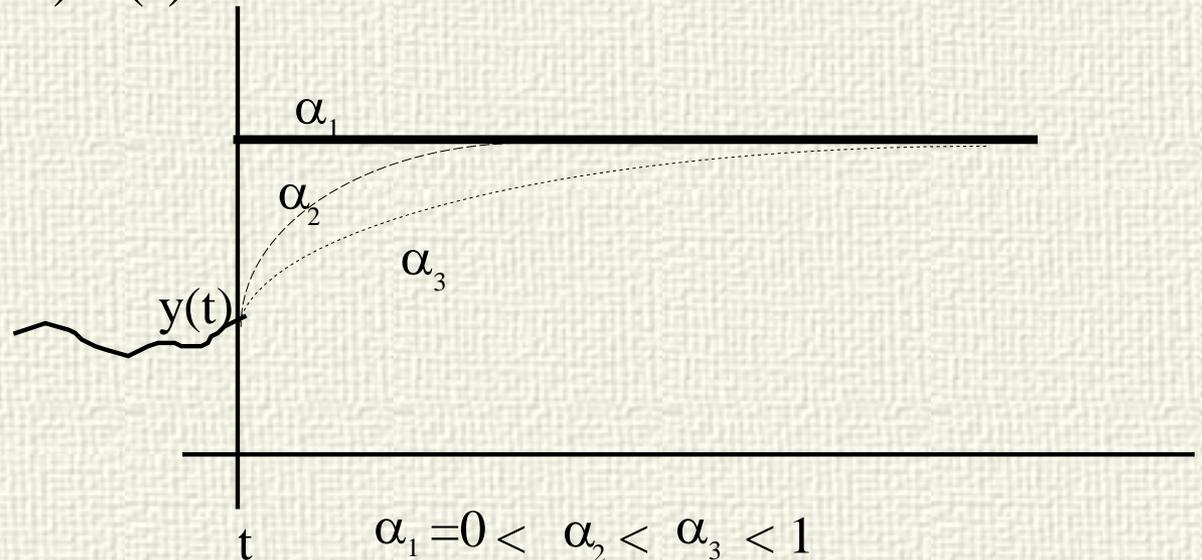
Índice a minimizar:

$$\min_U J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2$$

$$r(t+j) = \alpha r(t+j-1) + (1-\alpha)w(t)$$

$$r(t) = y(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

r referencia interna que conecta el valor actual de $y(t)$ con el valor futuro deseado w



Indica lo rápido que deseamos alcanzar el valor de la referencia w

Velocidad de la referencia interna
Tiempo de respuesta en lazo cerrado



EPSAC

Indice a minimizar:

$$\min_U J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 = (Y - R)'(Y - R) =$$

$$= (Y_{\text{base}} + GU - R)'(Y_{\text{base}} + GU - R)$$

$$R = \begin{bmatrix} r(t + N_1) \\ \vdots \\ r(t + N_2) \end{bmatrix}$$

La solución óptima se encuentra derivando J respecto a U e igualando a cero la derivada:

$$U^* = (G'G)^{-1} G'(R - Y_{\text{base}})$$

La señal que se aplica al proceso es: $u(t) = u_{\text{base}} + \delta u(t)^*$

Acción integral



Estabilidad numérica

$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

$$\text{DMC} \quad \Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'(\mathbf{w} - \mathbf{p}_j)$$

El factor β puede servir para mejorar el condicionamiento numérico de $(\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I})^{-1}$

$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2$$

$$\text{EPSAC} \quad \mathbf{U}^* = (\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}'(\mathbf{R} - \mathbf{Y}_{\text{base}})$$

En problemas de cálculo donde interviene la pseudoinversa, $(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'$ suele ser conveniente usar la SVD de \mathbf{G} , (descomposición en valores singulares)



Cálculo de la pseudoinversa

$G(N, N_u) = T\Sigma V'$ Descomposición SVD de G , σ_i valores singulares

$T(N, N)$, $V(N_u, N_u)$, $\Sigma(N, N_u)$

$T'T = I$ $V'V = I$ $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$ $U^* = (G'G)^{-1}G'(R - Y_{\text{base}})$

$$\begin{aligned} U^* &= (V\Sigma'T'T\Sigma V')^{-1}V\Sigma'T'(R - Y_{\text{base}}) = \\ &= (V\Sigma'\Sigma V')^{-1}V\Sigma'T'(R - Y_{\text{base}}) = \\ &= V(\Sigma'\Sigma)^{-1}V^{-1}V\Sigma'T'(R - Y_{\text{base}}) = \\ &= V(\Sigma'\Sigma)^{-1}\Sigma'T'(R - Y_{\text{base}}) = V\Sigma^+T'(R - Y_{\text{base}}) \end{aligned}$$

con $\Sigma^+ = (\Sigma'\Sigma)^{-1}\Sigma'$ Pseudoinversa de Σ
Fácil de calcular



Cálculo de la pseudoinversa

$$\Sigma^+ = (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma'$$

Con la SVD no es necesario un cálculo “real” de la pseudoinversa ya que, por ejemplo,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si G está mal condicionada, U puede presentar errores grandes



Cálculo con PCA

con $E = Y_{\text{base}} - R$

$$J(U) = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 = (Y_{\text{base}} + GU - R)'(Y_{\text{base}} + GU - R) =$$

$$= \|E + GU\|_2^2 = \|E + T\Sigma V'U\|_2^2 =$$

Como T es ortonormal y esa operación no modifica la norma euclídea:

$$= \|T'(E + T\Sigma V'U)\|_2^2 = \|T'E + \Sigma V'U\|_2^2$$

definiendo $P = -V'U$ $F = T'E = T'(Y_{\text{base}} - R)$

$$J(U) = J(P) = \|F - \Sigma P\|_2^2$$

$$\min J(P) \Rightarrow P^* = \Sigma^+ F$$

$$U^* = -VP^*$$

Columnas de P componentes principales de U



El Regulador GPC

Generalized Predictive Control

Modelo CARIMA: Función de transferencia + ruido estocástico no estacionario

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \xi(t)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}$$

$$T(q^{-1}) = 1 + t_1q^{-1} + \dots + t_tq^{-t}$$

$y(t)$ variable controlada

$u(t)$ variable manipulada

$\xi(t)$ ruido blanco

Válido con sistemas estables e inestables



GPC Predicciones

Objetivo: Fórmula de predicción de $y(t+j)$ $j=1,\dots,N2$
que separe el efecto de:

- los valores pasados de entradas, salidas y perturbaciones pasados
- los valores presentes y futuros de la señal de control

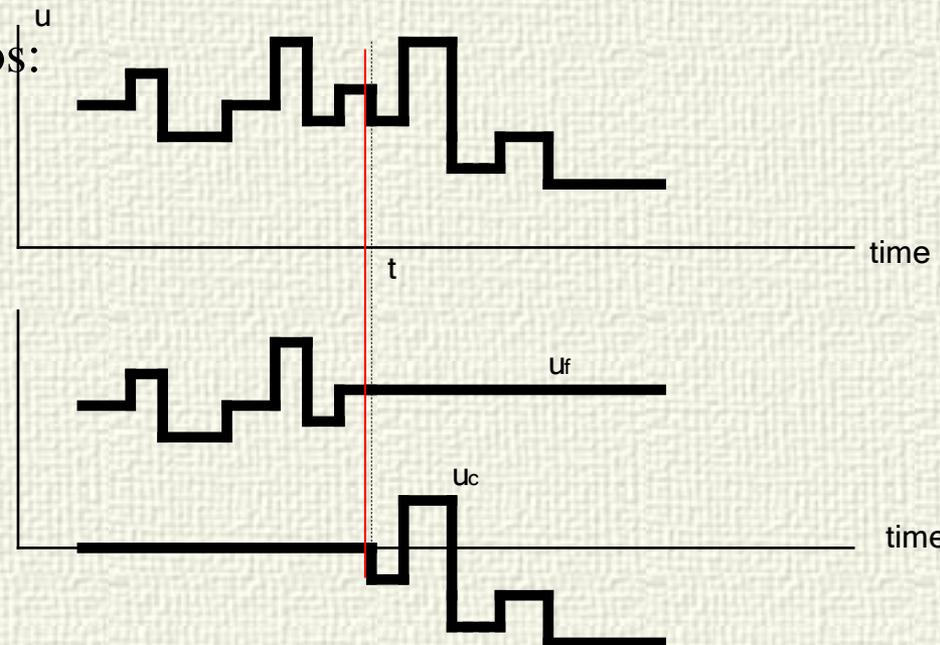
Se divide la señal de control en suma de dos:

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t)$$

$$u_f(t+j) = \begin{cases} u(t-1) & j = 0, \dots, N2 \\ u(t+j) & j = -1, -2, \dots \end{cases}$$

$$u_c(t+j) = \begin{cases} u(t+j) - u(t-1) & j = 0, \dots, N2 \\ 0 & j = -1, -2, \dots \end{cases}$$

de modo que $\Delta u_c(t+j) = \begin{cases} \Delta u(t+j) & j \geq 0 \\ 0 & j < 0 \end{cases}$





GPC Predicciones

Modelo:
$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \xi(t)$$

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t)$$

Predicción:
$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_c(t+j) + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_f(t+j) + \frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \xi(t+j)$$

Dos términos:
$$y_c(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_c(t+j) \quad \text{depende de las } u(t+i) \text{ futuras}$$

$$y_f(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_f(t+j) + \frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \xi(t+j) \quad \text{depende del pasado}$$



Predicciones /u futuras

$$\begin{aligned}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_c(t+j) &= (h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots) u_c(t+j) = \\ &= (g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots) \Delta u_c(t+j)\end{aligned}$$

donde se ha usado $h_i = g_i - g_{i-1} = \Delta g_i$

y como:

$$\Delta u_c(t+j) = \begin{cases} \Delta u(t+j) & j \geq 0 \\ 0 & j < 0 \end{cases}$$

$$(g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + g_j q^{-j}) \Delta u(t+j) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j)$$

$$G_j(q^{-1}) = g_1 q^{-1} + \dots + g_j q^{-j}$$

Puede calcularse con independencia de la estabilidad de B/A



Predicciones / pasado

$$y_f(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_f(t+j) + \frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \xi(t+j)$$

El término de ruido involucra valores del pasado (determinables) y del futuro

Filtro $\frac{\Delta}{T(q^{-1})}$ $\tilde{y}_f(t+j) = \frac{\Delta}{T(q^{-1})} y_f(t+j)$ $\tilde{u}_f(t+j) = \frac{\Delta}{T(q^{-1})} u_f(t+j)$

$$A(q^{-1})\tilde{y}_f(t+j) = B(q^{-1})\tilde{u}_f(t+j) + \xi(t+j)$$

Mejor predicción $E\{\xi(t+j)|t\} = 0$ $A(q^{-1})\hat{\tilde{y}}_f(t+j) = B(q^{-1})\tilde{u}_f(t+j)$

Puede iterarse para calcular $\hat{\tilde{y}}_f(t+j)$ pues $u_f = u(t-1)$ es conocido en t

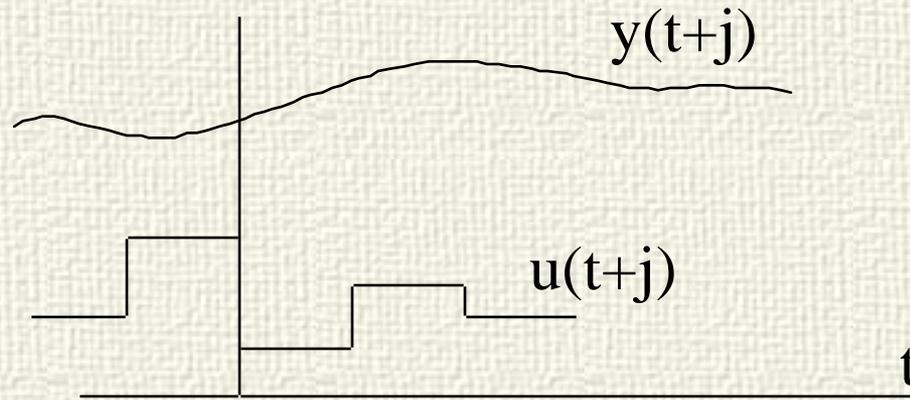
La respuesta libre se obtiene por deconvolución: $\hat{y}_f(t+j) = \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \hat{\tilde{y}}_f(t+j)$



Modelo de predicción

Respuesta forzada: $G_j(q^{-1})\Delta u(t+j)$

Respuesta libre: $p_j = \hat{y}_f(t+j)$



$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j$$



GPC Predicciones/ Another method

Modelo:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \xi(t)$$

Predicción:

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j) + \frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \xi(t+j)$$

El término de ruido mezcla valores pasados (conocidos) y futuros

$$\frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} = E_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta}$$

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) + \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \xi(t)$$



GPC Predicciones/2

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j) + \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1}) \Delta} \xi(t)$$

El ruido puede ser calculado en t a partir del modelo: $A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \xi(t)$

$$\xi(t) = \frac{\Delta}{T(q^{-1})} (A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t))$$

$$\begin{aligned} y(t+j) &= \frac{B}{A} u(t+j) + E_j \xi(t+j) + \frac{F_j}{A \Delta T} (A y(t) - B u(t)) = \\ &= \frac{B}{A} \left[1 - q^{-j} \frac{F_j}{T} \right] u(t+j) + \frac{F_j}{T} y(t) + E_j \xi(t+j) \end{aligned}$$

$$\frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1}) \Delta} = E_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1}) \Delta} \quad 1 - q^{-j} \frac{F_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} = \frac{E_j(q^{-1}) A(q^{-1}) \Delta}{T(q^{-1})}$$



GPC Predicciones/3

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})E_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} \Delta u(t+j) + \frac{F_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} y(t) + E_j(q^{-1}) \xi(t+j)$$

La predicción de varianza mínima es el valor esperado condicional:

$$\hat{y}(t+j) = E\{y(t+j|t)\} \quad \hat{y}(t+j) = \frac{B(q^{-1})E_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} \Delta u(t+j) + \frac{F_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} y(t)$$

El término de u mezcla valores pasados y futuros

$$\frac{B(q^{-1})E_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} = G_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{N_j(q^{-1})}{T(q^{-1})}$$

$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j) + \frac{N_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} \Delta u(t) + \frac{F_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} y(t)$$



GPC Predicciones/4

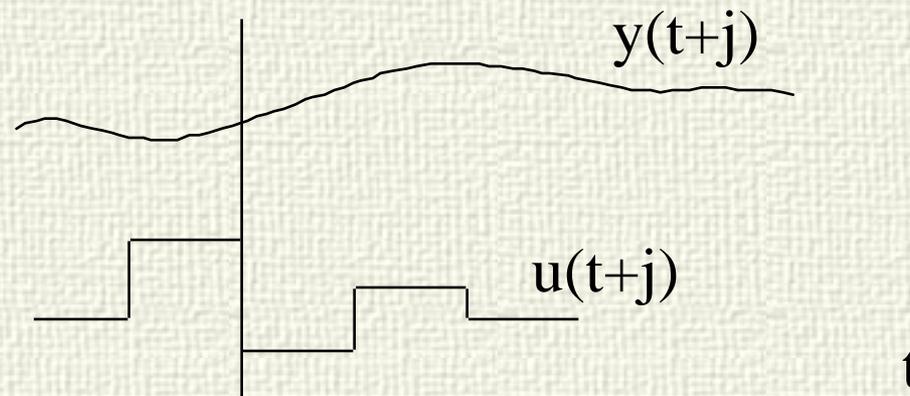
$$\hat{y}(t + j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t + j) + p_j$$

$$p_j = \frac{N_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} \Delta u(t) + \frac{F_j(q^{-1})}{T(q^{-1})} y(t)$$

Respuesta forzada

$$G_j(q^{-1})\Delta u(t + j)$$

p_j Respuesta libre





GPC Función de coste / Referencia Interna

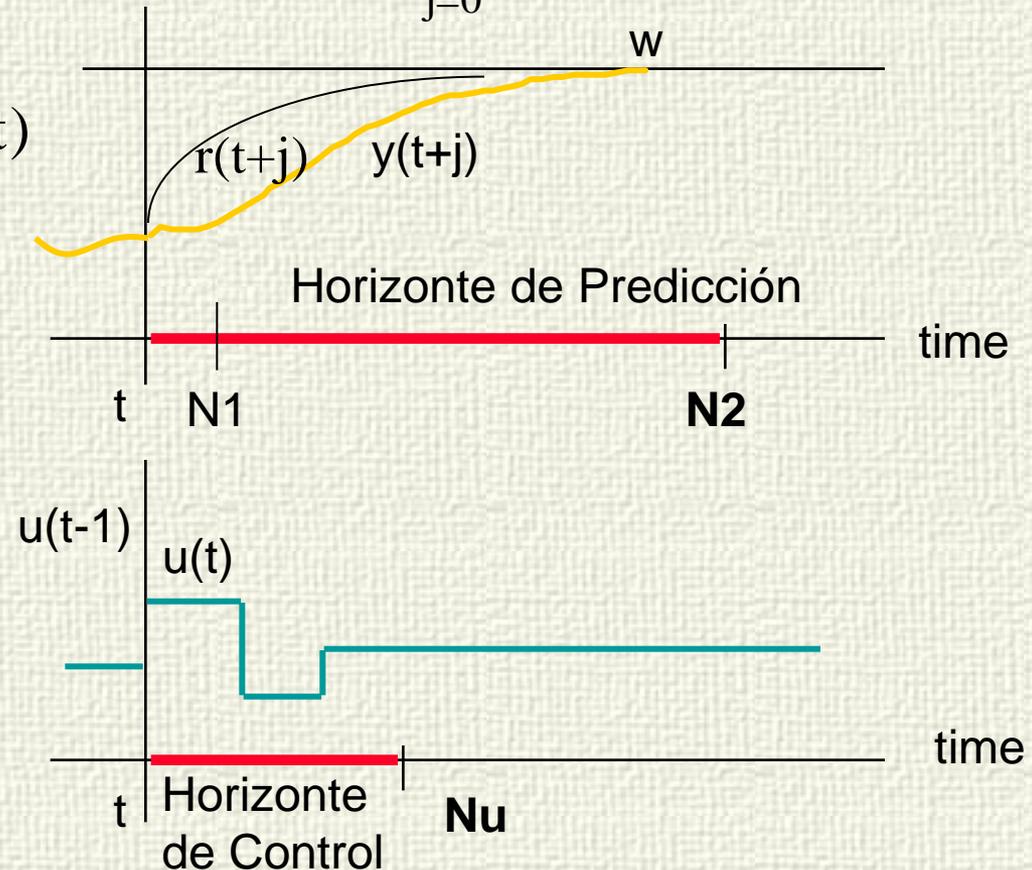
$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

$$r(t+j) = \alpha r(t+j-1) + (1-\alpha)w(t)$$

$$r(t) = y(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$r(t+j) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha q^{-1}} w(t)$$

$$r(t) = y(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$





Solución óptima

$$J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$
$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j$$

Puede expresarse en forma matricial definiendo:

$$\Delta \mathbf{u}(t)' = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+Nu-1)]$$

$$\mathbf{e}_0' = [r(t+N1) - p_{N1}, r(t+N1+1) - p_{N1+1}, \dots, r(t+N2) - p_{N2}]$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{N1} & \dots & \mathbf{g}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{g}_{N1+1} & \dots & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{g}_{N2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{g}_{N2-Nu+1} \end{bmatrix}$$



Ley de control GPC

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \quad \mathbf{J} = \Delta \mathbf{u}'(t) [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u}(t) - 2\mathbf{e}_0' \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{e}_0' \mathbf{e}_0$$

Si no hay restricciones en las variables, puede resolverse haciendo:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \Delta \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$$2[\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}] \Delta \mathbf{u} - 2\mathbf{G}'\mathbf{e}_0 = 0$$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'\mathbf{e}_0$$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'(\mathbf{r} - \mathbf{p}_j)$$

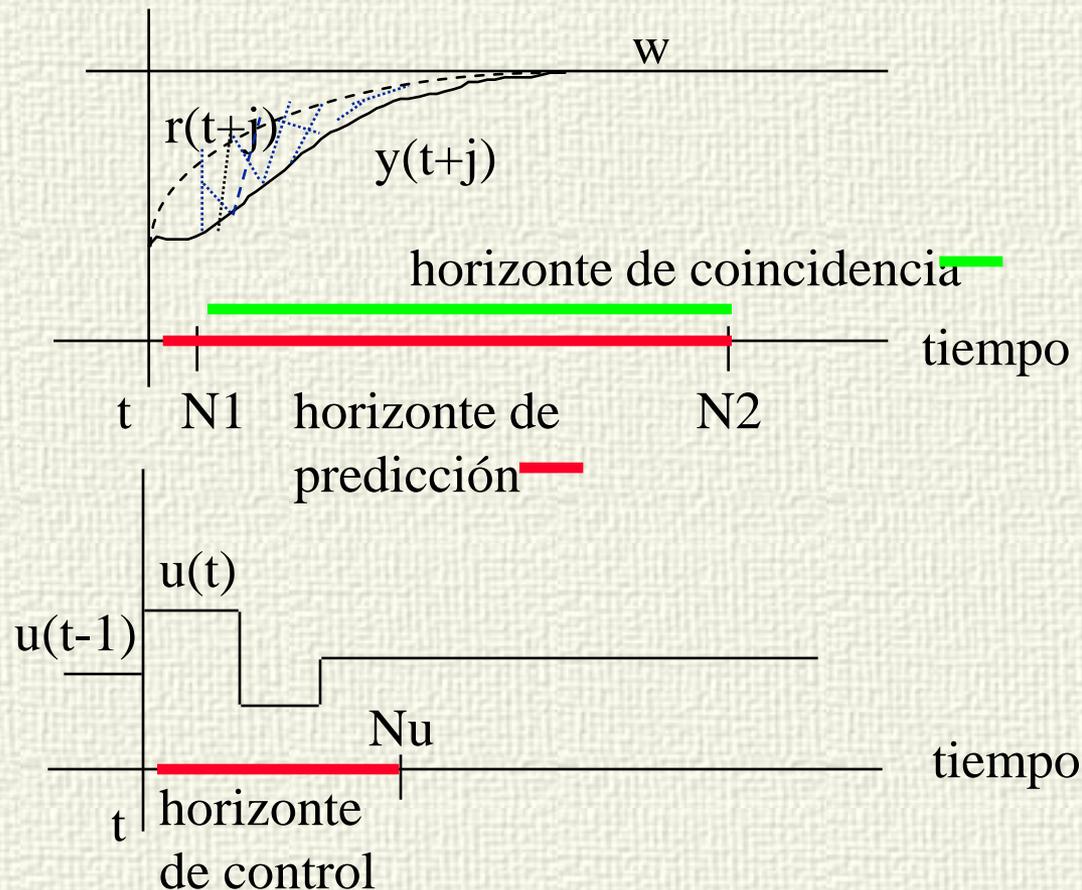
El factor β puede servir para mejorar el condicionamiento numérico de $(\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I})^{-1}$ y para atenuar los cambios en $u(t)$



Parámetros GPC

$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

β Factor de peso
Move
supression
factor



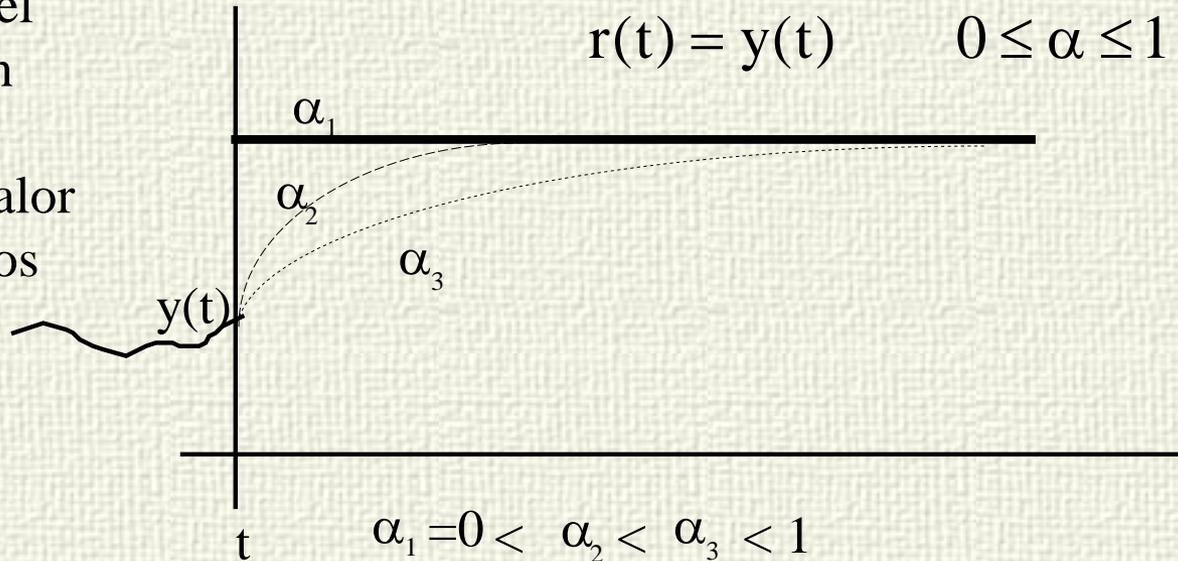


Parámetros GPC: referencia interna

El factor α de r juega un papel similar a β en cuanto a moderar el valor de los cambios de u

$$r(t + j) = \alpha r(t + j - 1) + (1 - \alpha)w(t)$$

$$r(t) = y(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$



Velocidad de la referencia interna
Tiempo de respuesta en lazo cerrado



Parámetros GPC: Polinomio T



$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} \xi(t)$$

Polinomio T

Se escoge para mejorar la robustez del sistema

$$T = A$$

$$T = A. \text{ monomio}$$

$$T = \dots$$



PFC Predictive Functional Control



Model

$$\mathbf{x}_m(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y_m(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{D}u(t)$$

Base functions

$$u(t+j) = \sum_{i=1}^{N_b} \mu_i(t) F_i(j)$$

$$y_{Bk}(t) = \sum_{i=1}^t \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}F_k(t-i)$$

$$\min_{\mu} J = \min_{\mu} \sum_{j=1}^N [\hat{y}(t+h_j) - r(t+h_j)]^2$$

Predictions

$$y_m(t+j) = \mathbf{C} \left[\mathbf{A}^j \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i=1}^j \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}u(t+i-1) \right]$$

$$y_m(t+j) = y_L(t+j) + y_f(t+j)$$

$$y_L(t+j) = \mathbf{C}\mathbf{A}^j \mathbf{x}_m(t)$$

$$y_f(t+j) = \sum_{i=1}^j \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}u(t+i-1)$$

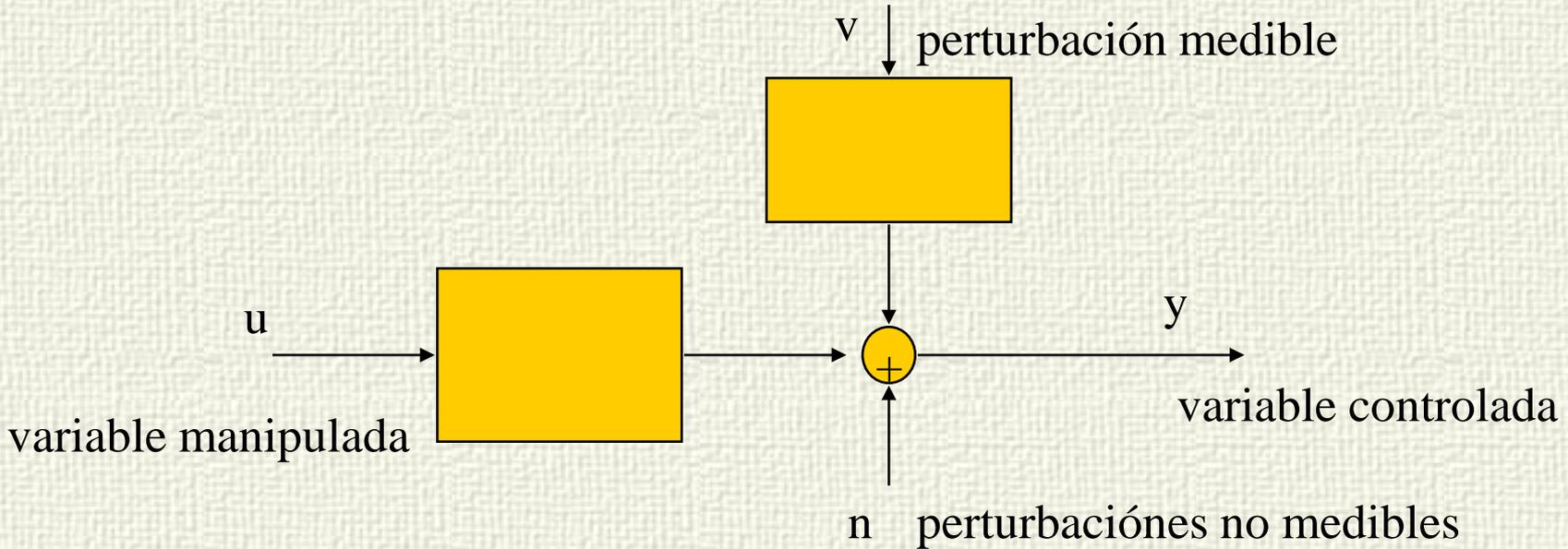
$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}\mathbf{A}^j \mathbf{x}_m(t) + \sum_{k=1}^{N_b} \mu_k(t) y_{Bk}(j) + n(t+j)$$

H_j coincidence points

r internal reference



Perturbaciones medibles



Modelo DMC:
$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i) + n(t)$$



Predicciones (DMC) con perturbaciones conocidas

Predicción: Separar términos que dependen del futuro y del pasado

$$y(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + \\ + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) + n(t+j)$$

Hipótesis: $n(t+j) = n(t) = y_p(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i)$

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + \\ + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) + y_p(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i)$$



DMC: Respuesta libre

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + \\ + \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)$$

esto es

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} (d_{j+i} - d_i) \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)$$

En procesos estables: $g_{j+i} - g_i \cong 0$ $d_{j+i} - d_i \cong 0$ $i > N$, $j = N1, \dots, N2$

$$p_j = y_p(t) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^N (d_{j+i} - d_i) \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)$$

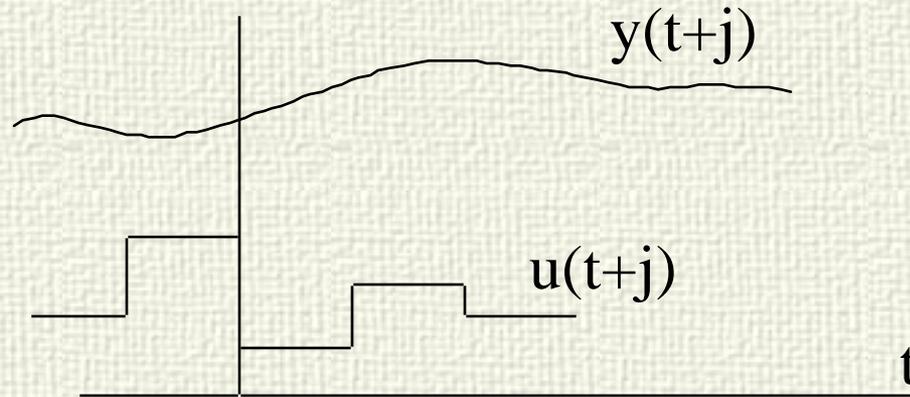
se necesita una hipótesis sobre la evolución futura de v , usualmente $v(t+j) = v(t) +$ horizonte móvil



Corrección feedforward automática

Respuesta forzada: $G_j(q^{-1})\Delta u(t+j)$

Respuesta libre: $p_j = \hat{y}_f(t+j)$



$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j$$

Formalmente la misma expresión.

El efecto de la perturbación está incluido en la respuesta libre

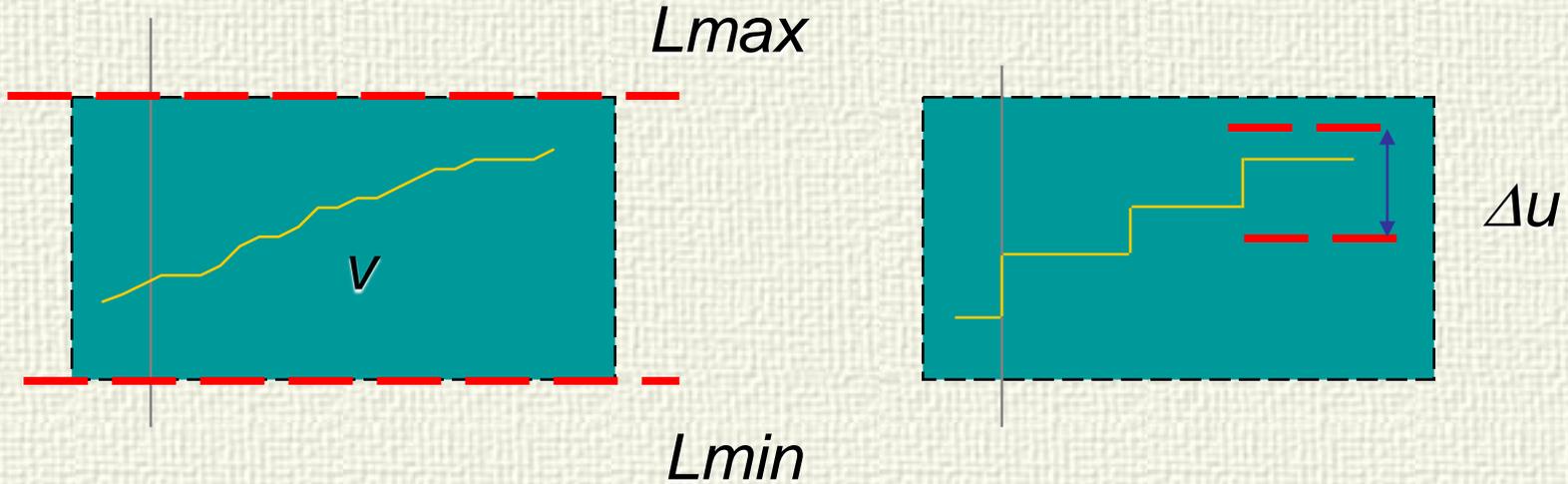


Restricciones

- ✓ Las restricciones en los valores que pueden tomar las variables aparecen de forma natural en la formulación de los problemas de control:
 - Limitaciones físicas de las variables
 - Límites de seguridad
 - Requisitos de calidad, etc.



Restricciones



Rango de las señales de control

$$U_m \leq u(t+j) \leq U_M$$

Velocidad de cambio de u :

$$D_m \leq \Delta u(t+j) \leq D_M$$

Rango de las variables controladas:

$$L_m \leq \hat{y}(t+j) \leq L_M$$

Deben ser añadidas a la formulación del problema de optimización



DMC con restricciones, QDMC

$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

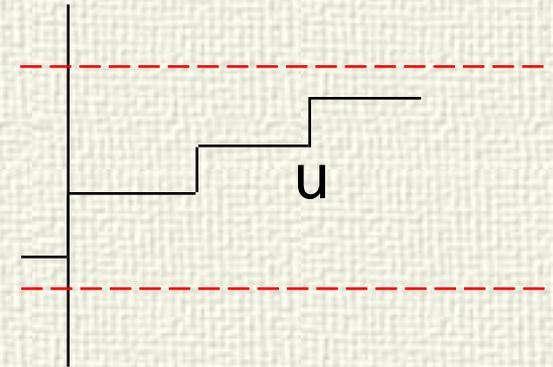
$$D_m \leq \Delta u(t+j) \leq D_M$$

$$U_m \leq u(t-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(t+i) \leq U_M$$

$$j = 0, \dots, Nu$$

$$L_m \leq \hat{y}(t+j) = \sum_{k=1}^j g_k \Delta u(t-k+j) + p(t+j) \leq L_M$$

$$j = 1, \dots, N2$$



Problema de Programación
cuadrática QP



QP



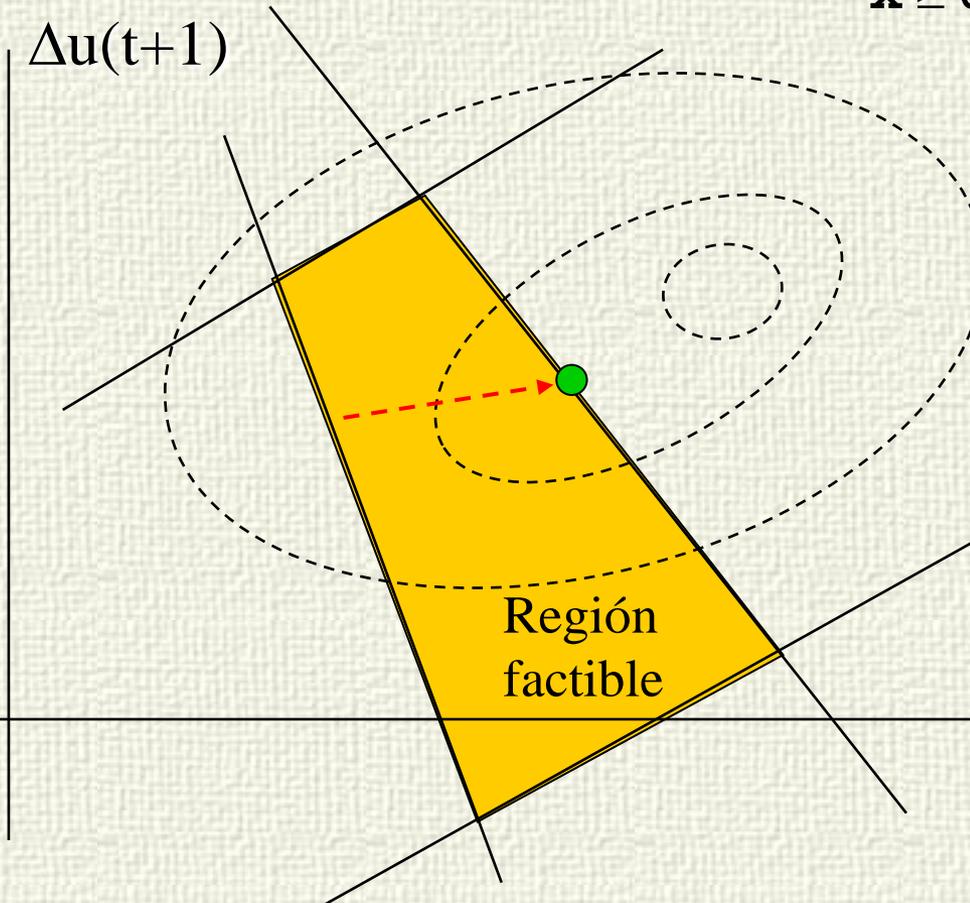
$$\min_x \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Posibles
problemas de
factibilidad

$\Delta u(t+1)$



Región
factible

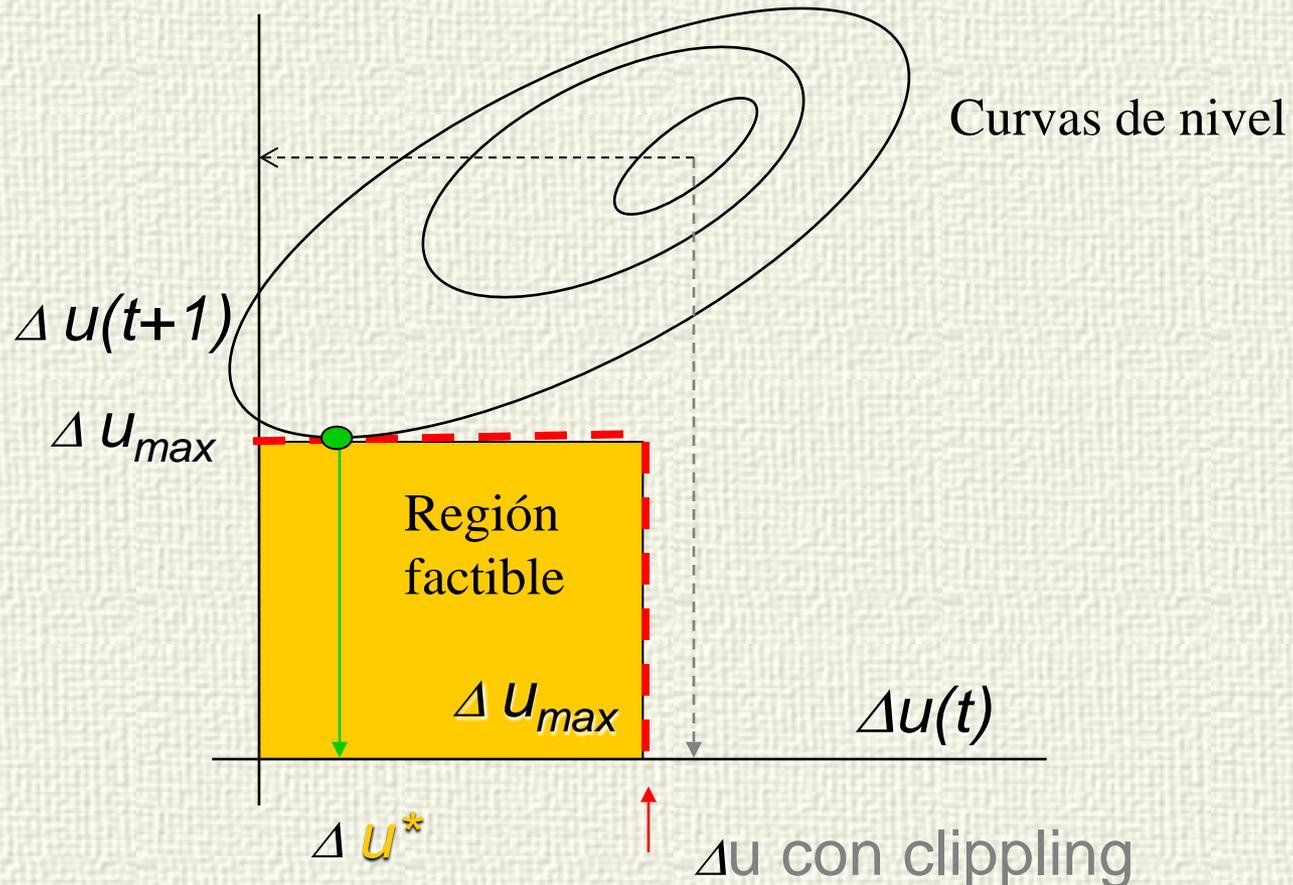
Ha de
resolverse un
problema QP
en línea cada
periodo de
muestreo

Software
numérico
eficiente

$\Delta u(t)$

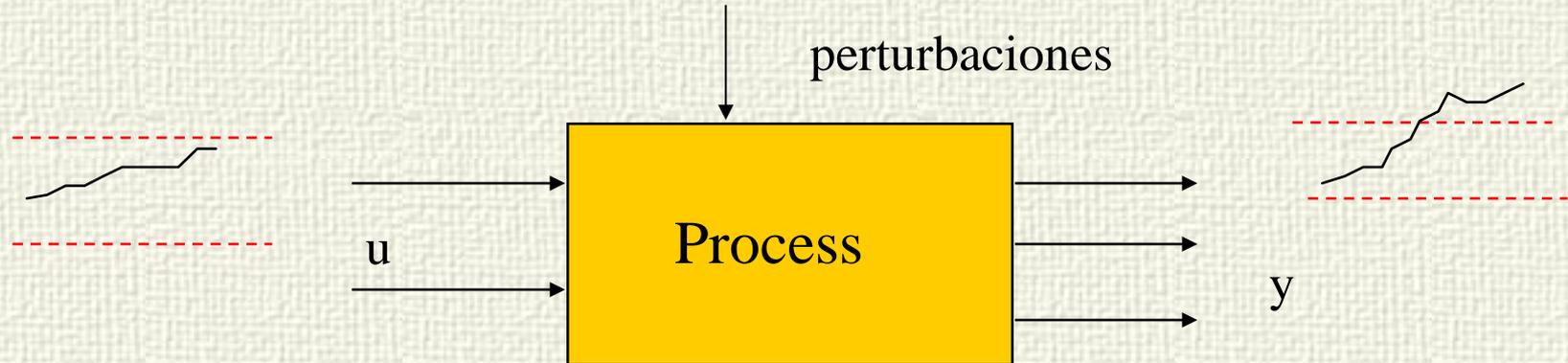


Constraints: Clipping is not a good solution



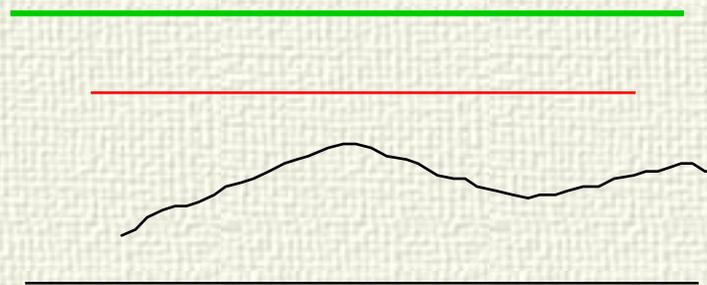


Factibilidad



Debido al rango de operación limitado de las variables manipuladas, o a perturbaciones o dinámicas del proceso, es posible que no exista ninguna señal de control capaz de mantener las predicciones de las salidas dentro de sus límites. En tonces el problema QP no tiene solución

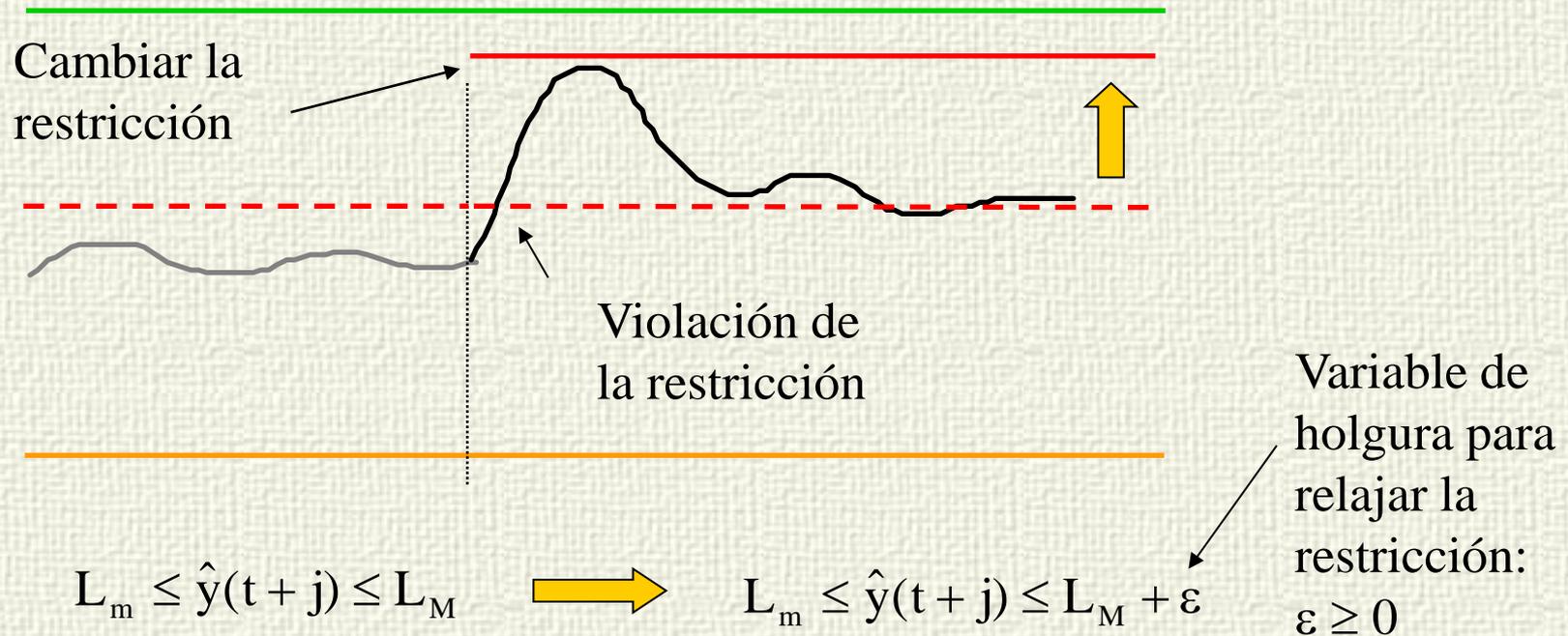
Restricciones
duras y blandas



Restricción física
Limite de operación



Tratamiento de la factibilidad (Restricciones duras)

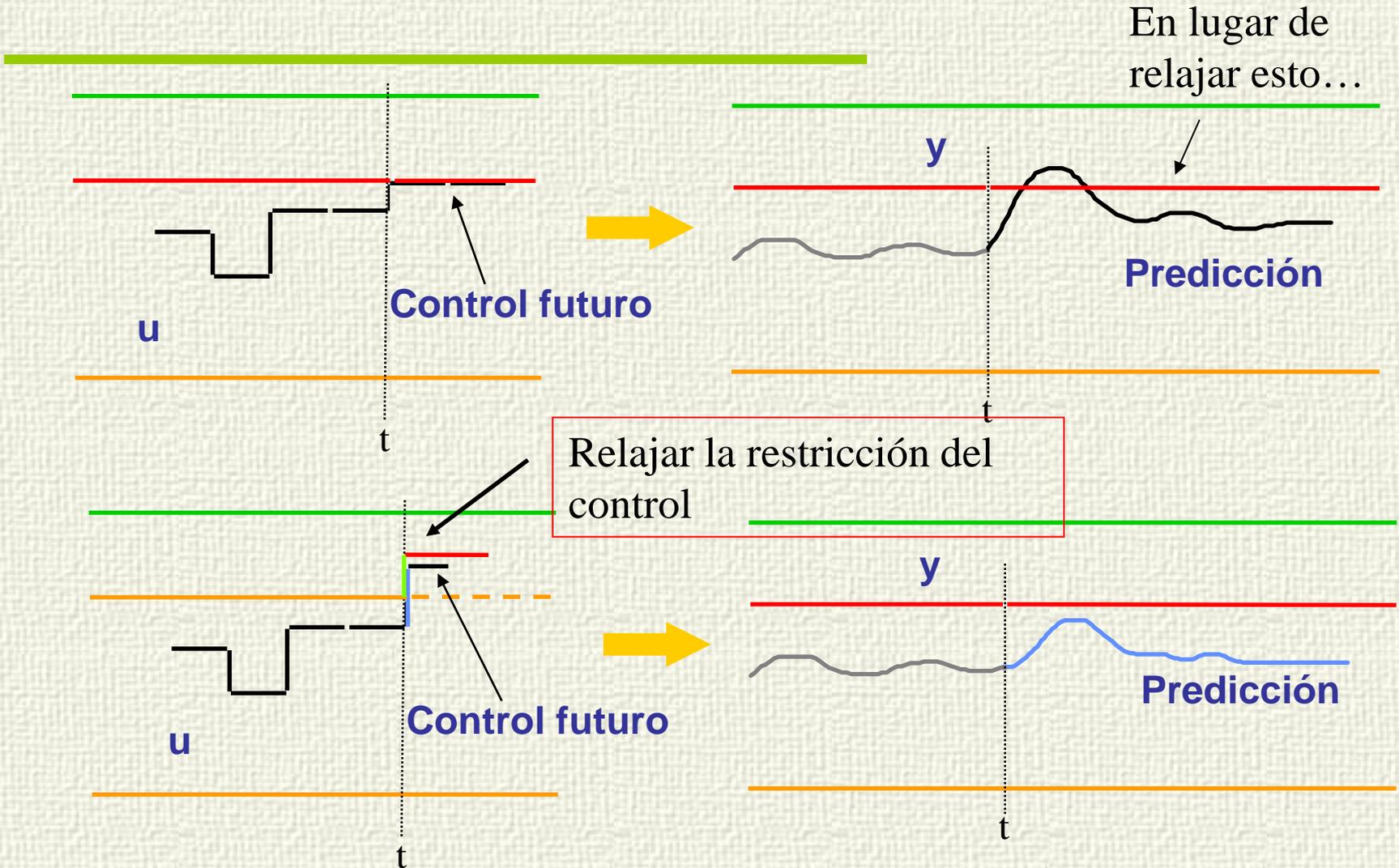


$$\min_{\Delta u, \epsilon} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2 + \eta \epsilon^2$$

Nueva variable de decisión η factor de peso alto



Factibilidad

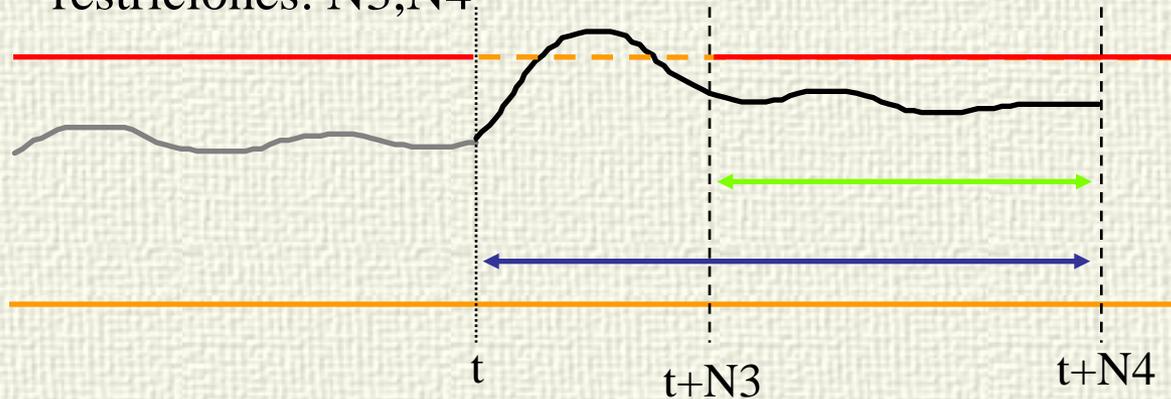




Factibilidad



Otra opción: cambiar el rango de aplicación de las restricciones: N3, N4

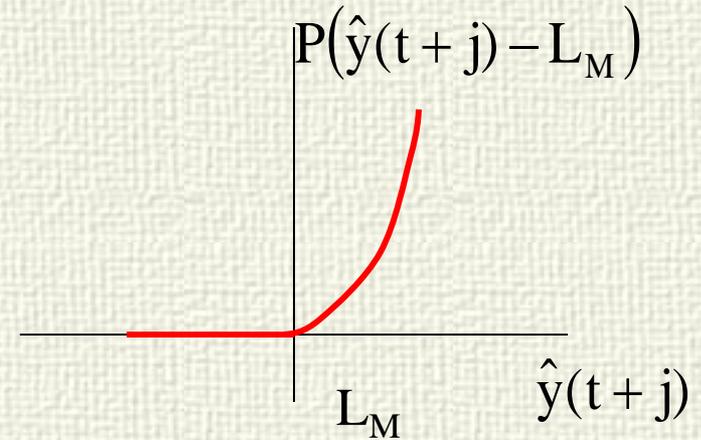
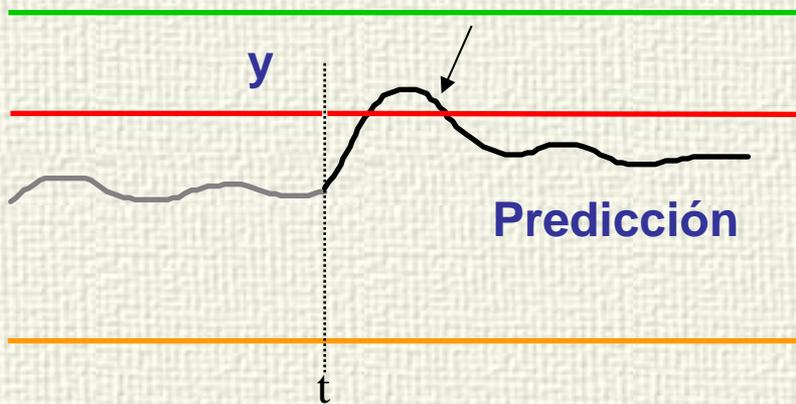


- ✓ Diferentes políticas de tratamiento de la factibilidad
- ✓ Prioridades asignadas a las restricciones
- ✓ Puede tratarse en línea o como un problema separado



Factibilidad, restricciones blandas

- ✓ Restricciones blandas (Soft constraints) la solución no se degrada mucho si se violan en una pequeña cantidad



$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2 + \eta \max(0, \hat{y}(t+j) - L_M)^2$$

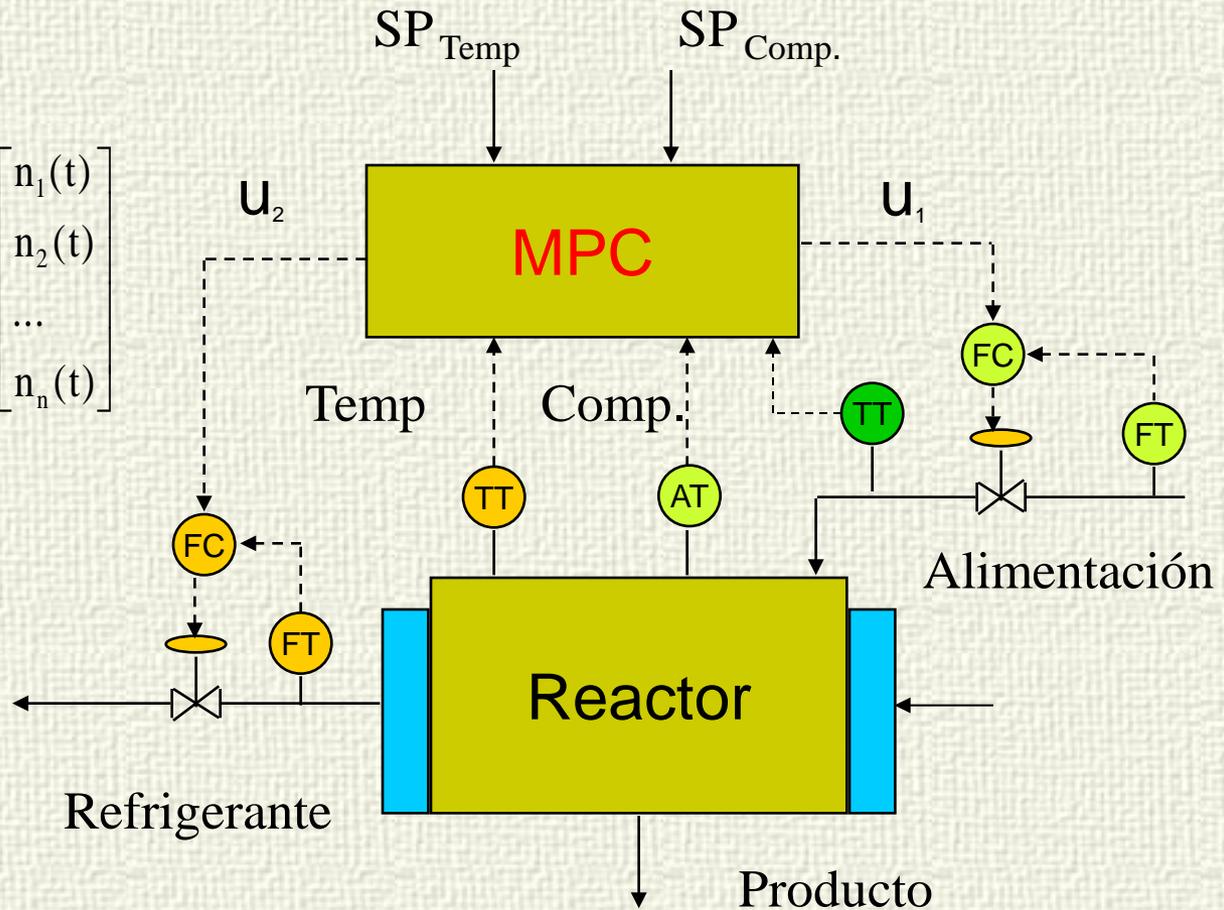


Formulación Multivariable



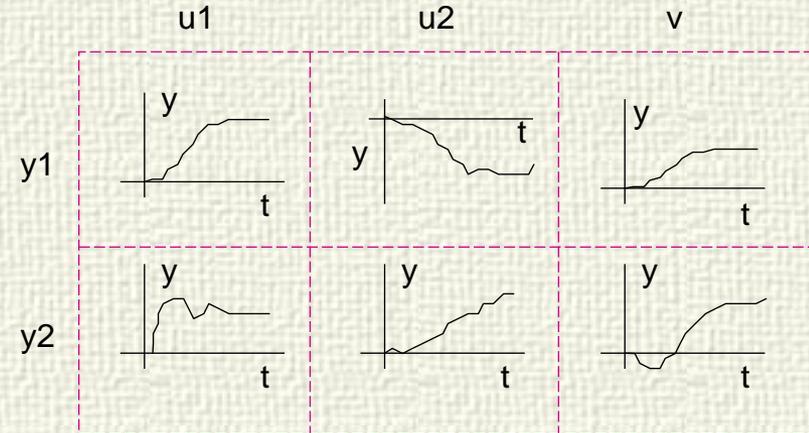
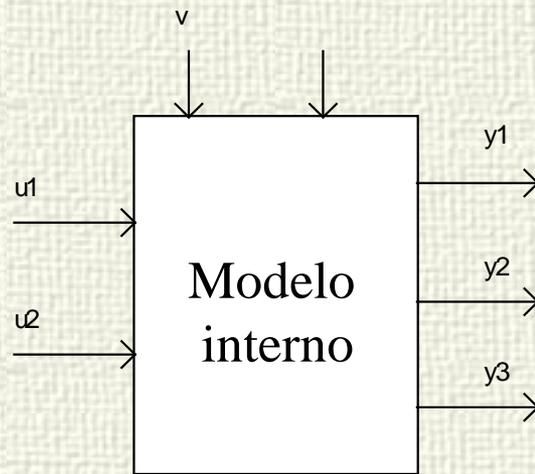
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \dots \\ n_n(t) \end{bmatrix}$$

Se necesita un modelo que relacione las variables controladas con las manipuladas y perturbaciones medibles





DMC Multivariable



Matriz dinámica

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i11} \Delta u_1(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i12} \Delta u_2(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i13} \Delta v(t-i) + n_1(t)$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i21} \Delta u_1(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i22} \Delta u_2(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i23} \Delta v(t-i) + n_2(t)$$

$$y_3(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i31} \Delta u_1(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i32} \Delta u_2(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{i33} \Delta v(t-i) + n_3(t)$$



DMC Multivariable



Predicciones:

$$\hat{y}_1(t+j) = \sum_{i=1}^j g_{i11} \Delta u_1(t-i+j) + \sum_{i=1}^j g_{i12} \Delta u_2(t-i+j) + p_1(t+j)$$

$$\hat{y}_2(t+j) = \sum_{i=1}^j g_{i21} \Delta u_1(t-i+j) + \sum_{i=1}^j g_{i22} \Delta u_2(t-i+j) + p_2(t+j)$$

Min funcion
de costo:

$$\hat{y}_3(t+j) = \sum_{i=1}^j g_{i31} \Delta u_1(t-i+j) + \sum_{i=1}^j g_{i32} \Delta u_2(t-i+j) + p_3(t+j)$$

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u} J = & \sum_{j=N1}^{N2} \gamma_1 [\hat{y}_1(t+j) - w_1(t+j)]^2 + \sum_{j=N1}^{N2} \gamma_2 [\hat{y}_2(t+j) - w_2(t+j)]^2 + \\ & + \sum_{j=N1}^{N2} \gamma_3 [\hat{y}_3(t+j) - w_3(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu_1-1} [\beta_1 \Delta u_1(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu_2-1} [\beta_2 \Delta u_2(t+j)]^2 \end{aligned}$$

γ Equal concern errors , factores de peso (y normalización)

Con restricciones lineales: problema **QP**



MPC Multivariable



$$\min_{\Delta u_k(t+j)} J = \min_{\Delta u_k(t+j)} \sum_{k=1}^N \sum_{j=N1_k}^{N2_k} \gamma_k \left(\hat{y}_k(t+j) - w_k(t+j) \right)^2 + \sum_{K=1}^M \sum_{j=0}^{Nu_k-1} \beta_k \left(\Delta u_k(t+j) \right)^2$$

con:

$$\hat{y}_k(t+j) = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^j g_{iks} \Delta u_s(t+j-i) + p_k(t+j)$$

$$Dm_k < \Delta u_k(t+j) < DM_k$$

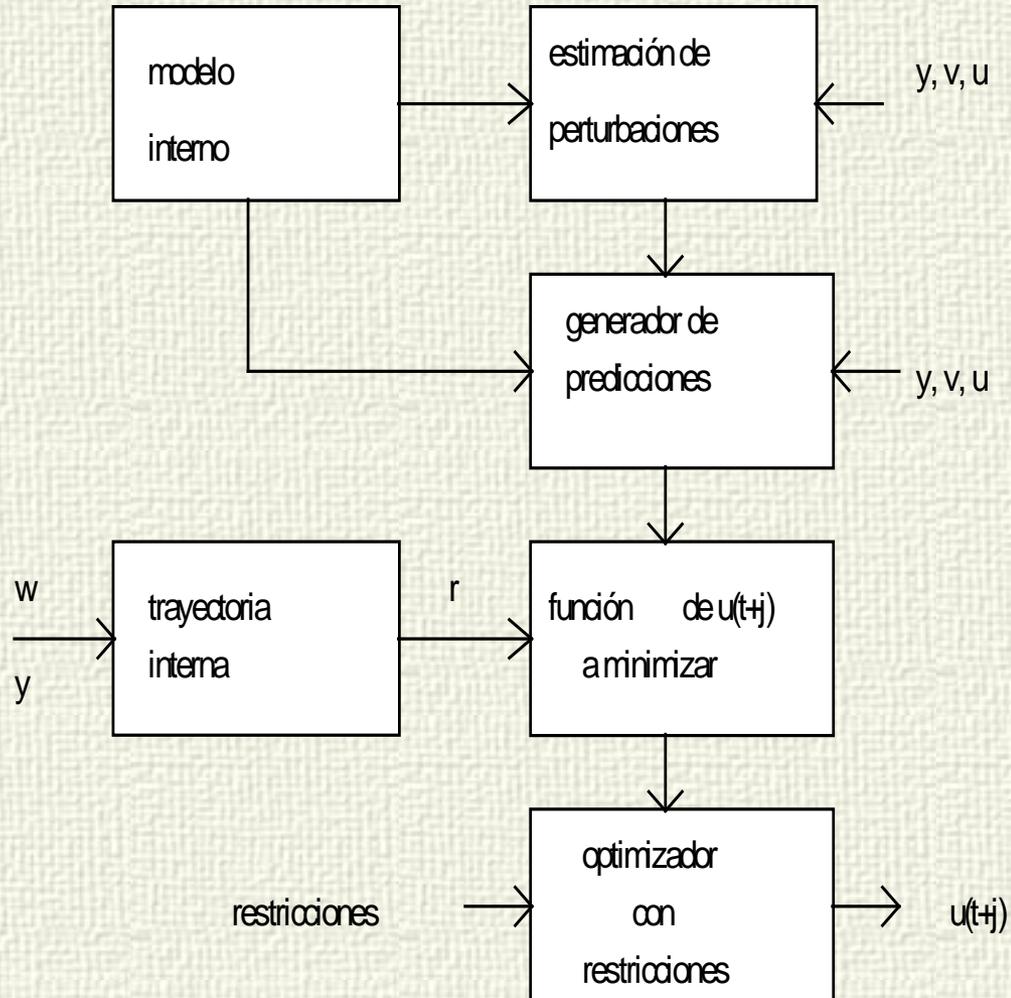
$$Um_k < u_k(t+j) < UM_k$$

$$Lm_k < y_k(t+j) < LM_k$$

Resuelto como un problema de Programación cuadrática cada periodo de muestreo



Estructura MPC





MPC en espacio de estados

$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2 \quad \text{Función de coste}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Modelo del proceso

$$y(t) = Cx(t)$$

$$U_m \leq u(t+j) \leq U_M \quad \Rightarrow \quad U_m \leq u(t-1) + \sum_{k=0}^j \Delta u(t+k) \leq U_M \quad j=0, \dots, N_u - 1$$

$$D_m \leq \Delta u(t+j) \leq D_M \quad j=0, \dots, N_u - 1 \quad \Delta u(t+j) = 0 \quad j \geq N_u$$

$$L_m \leq \hat{y}(t+j) \leq L_M \quad j = N_1, \dots, N_2$$

Para calcular J hay que calcular antes las predicciones de la salida



Cálculo de las predicciones de la salida



$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t+2) = Ax(t+1) + Bu(t+1) = A^2x(t) + ABu(t) + Bu(t+1)$$

$$x(t+3) = Ax(t+2) + Bu(t+2) = A^3x(t) + A^2Bu(t) + ABu(t+1) + Bu(t+2)$$

....

$$x(t+j) = A^jx(t) + \sum_{k=1}^j A^{j-k}Bu(t+k-1)$$

$$y(t+j) = CA^jx(t) + \sum_{k=1}^j CA^{j-k}Bu(t+k-1)$$

Pero el estado $x(t)$ puede no ser accesible



Estimación de los estados del modelo



$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Como los estados del modelo $x(t)$ puede que no sean medibles, normalmente se requiere el uso de un estimador u observador de estado

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + L[y_p(t) - C(A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1))]$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad y_p \text{ representa la salida medida del proceso}$$

Las predicciones de la salida se calculan remplazando el estado $x(t)$ por sus estimaciones:

$$\hat{y}(t+j) = CA^j\hat{x}(t) + \sum_{k=1}^j CA^{j-k}Bu(t+k-1)$$

En estado estacionario:

$$\hat{y}(t+j) = CA^j\hat{x} + \sum_{k=1}^j CA^{j-k}Bu = CA^j\hat{x} + C(I + A + \dots + A^{j-1})Bu$$



Diseño del observador

$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$ ¿Cómo estimar los estados del modelo $x(t)$,
 $y(t) = Cx(t)$ midiendo la salida del modelo $y(t)$?

In predictor form:

Hay muchos criterios de diseño para escoger L . Uno de ellos considera la estimación del error:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

$$e(t+1) = Ae(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

La salida del modelo viene dada por: $y(t) = Cx(t)$

$$e(t+1) = Ae(t) + L[Cx(t) - C\hat{x}(t)] = Ae(t) + LCe(t)$$

$$e(t+1) = (A + LC)e(t)$$

L puede escogerse de modo que los autovalores de $(A+LC)$ sean estables y den una velocidad de convergencia adecuada a cero del error de estimación $e(t)$

$e(t)$ puede llevarse a cero escogiendo adecuadamente L



Diseño del observador en forma de filtro



$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Estimar los estados $x(t)$ con información hasta $(t-1)$ e $y(t)$

$$\hat{x}(t|t-1) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) \quad \text{Predictor}$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t|t-1) + L[y(t) - C\hat{x}(t|t-1)] \quad \text{Corrector}$$

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad \text{Error de estimación}$$

$$e(t) = Ae(t-1) + L[y(t) - C(A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1))]$$

Model output is given by: $y(t) = Cx(t) = CAx(t-1) + CBu(t-1)$

$$e(t) = Ae(t-1) + L[CAx(t-1) - CA\hat{x}(t-1)] = Ae(t-1) + LCAe(t-1)$$

$$e(t) = (A + LCA)e(t-1) \quad \text{Evolución temporal del error de estimación}$$

L puede escogerse de modo que los autovalores de $(A+LCA)$ sean estables y den una velocidad de convergencia adecuada a cero del error de estimación $e(t)$



Control sin error estacionario

La formulación anterior no garantiza que , en estado estacionario, la salida del proceso y_p sea igual a la consigna w (siendo w factible)

El motivo es que el observador, en estado estacionario, cumplirá::

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + L[y_p - C(A\hat{x} + Bu)]$$

Pero esto **no** implica que

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu$$

$$y_p = C(A\hat{x} + Bu) \quad \text{El modelo no es perfecto!}$$

Por tanto, en general, las predicciones del proceso serán diferentes de la salida del proceso

$$\hat{y}(t + j) = CA^j\hat{x} + C(I + A + \dots + A^{j-1})Bu \neq y_p$$

Y el controlador llevará al proceso a un objetivo equivocado y, por tanto, aun error estacionario



Formulación de la función de coste



$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$$

El valor $\Delta u=0$ en estado estacionario es compatible con cualquier valor de u que proporcione error nulo en estado estacionario

El modelo y la función de costo deben formularse de forma consistente con los objetivos

$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta u(t+j)]^2 \quad J \text{ no-consistente}$$

Si el modelo no es perfecto, el valor de u que minimiza esta función de costo en estado estacionario puede no coincidir con el que hace la salida del proceso igual a w .



Control sin error estacionario

$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$$

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + L[y_p(t) - C(A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1))]$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

Una estima sesgada de $y(t+j)$ conduce a predicciones incorrectas en estado estacionario y, por tanto, a error estacionario

En estado estacionario las predicciones son:

$$\hat{y}(t+j) = CA^j \hat{x} + C(I + A + \dots + A^{j-1})Bu$$

Cara a obtener error estacionario nulo a pesar de la existencia de errores de modelado:

- 1- El modelo y la función de costo deben formularse de forma coherente.
- 2- El observador debe incluir acción integral para hacer predicciones no sesgadas



Acción integral en el observador

Hay tres formas de añadir integradores al observador:

- Expandir el observador incluyendo a $u(t)$ como variable estimada
- Usar el modelo en forma de velocidad
- Añadir un modelo de perturbación

Estimar $u(t)$, que es una variable conocida, parece un poco antinatural, pero usando la variable u estimada para hacer las predicciones conduce a predicciones de la salida no sesgadas.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-1) \\ \hat{u}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(t-1) + \quad \text{donde, en general, } \hat{u}(t) \neq u(t)$$
$$+ \begin{bmatrix} L_x \\ L_u \end{bmatrix} \left[y_p(t) - [C \quad 0] \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-1) \\ \hat{u}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(t-1) \right]$$



a) Añadir u como variable estimada



En estado estacionario, con $\Delta u = 0$:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_x \\ L_u \end{bmatrix} \left[y_p(t) - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \right]$$

$$\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u} + L_x [y_p(t) - C(A\hat{x} + B\hat{u})]$$

$$\hat{u} = \hat{u} + L_u [y_p - C(A\hat{x} + B\hat{u})]$$

$$L_u [y_p - C(A\hat{x} + B\hat{u})] = 0$$

$$y_p = C(A\hat{x} + B\hat{u})$$

$$\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u}$$

y si L_u es de rango completo:

De esta forma se obtienen predicciones de la salida no sesgadas si se calculan con:

$$\hat{y}(t+j) = CA^j \hat{x} + C(I + A + \dots + A^{j-1})B\hat{u}$$



b) Forma de velocidad del modelo



$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Es
equivalente
a:

$$\begin{bmatrix} \Delta x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$$

definiendo $z = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

$$A_v = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix}$$

$$C_v = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

El modelo puede
escribirse como:

$$z(t+1) = A_v z(t) + B_v \Delta u(t)$$

$$y(t) = C_v z(t)$$



MPC con modelo en forma de velocidad



$$\min_{\Delta u(t+j)} J = \sum_{j=N1}^{N2} (C_v z(t+j) - w_v)' Q (C_v z(t+j) - w) + \sum_{j=0}^{N_u-1} \Delta u(t+j)' R \Delta u(t+j)$$

$$z(t+1) = A_v z(t) + B_v \Delta u(t)$$

$$y(t) = C_v z(t)$$

$$w_v = [0 \quad \dots \quad 0 \quad w]' \quad \text{plus constraints}$$

$$\text{As } z(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

El objetivo es reducir a cero $\Delta x(t+j)$ y llevar a $y(t+j)$ tan cerca como sea posible de w

Las predicciones de la salida en estado estacionario serán:

$$\hat{y}(t+j) = C_v A_v^j \hat{z}(t) + C_v (I + A_v + \dots + A_v^{j-1}) B_v \Delta u(t+j) \quad \text{con}$$

$$C_v A_v^j = [0 \quad I] \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix}^j = [0 \quad I] \begin{bmatrix} A^j & 0 \\ CA + \dots + CA^j & I \end{bmatrix} = [CA + \dots + CA^j \quad I]$$



MPC con modelo en forma de velocidad



$$\hat{y}(t+j) = \begin{bmatrix} CA + \dots + CA^j & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} + C_v (I + A_v + \dots + A_v^{j-1}) B_v \Delta u(t+j)$$

y como $\Delta \hat{x} \rightarrow 0, \Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{y}(t+j) = \hat{y}$

El estimador de z es:

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}(t-1) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(t-1) + \\ + \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \end{bmatrix} \left[y_p(t) - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}(t-1) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(t-1) \right) \right]$$



MPC con modelo en forma de velocidad



En estado estacionario:

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u + \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \end{bmatrix} \left[y_p - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u \right) \right]$$

$$\Delta \hat{x} \rightarrow 0 \quad \Delta u \rightarrow 0$$

$$0 = L_x [y_p - \hat{y}] \quad \hat{y} = \hat{y} + L_y [y_p - \hat{y}]$$

Si L_x o L_y son de rango completo, entonces: $y_p = \hat{y}$ y como $\hat{y}(t+j) = \hat{y}$

$$\hat{y}(t+j) = \hat{y} = y_p$$

Las predicciones son no sesgadas y no hay error estacionario, siempre que el controlador lleve el modelo en z a la consigna y alcanza estado estacionario.



c) Añadir un modelo de perturbación



En lugar del modelo:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Se utiliza uno expandido con perturbaciones de medida y estado:

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \\ v(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Aquí $d(t)$ y $v(t)$ son perturbaciones en los estados y la medida respectivamente

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$



Añadir un modelo de perturbación



Las ecuaciones del observador son:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{B}u(t-1) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}(t-1) + \mathbf{L}_x \left[y_p(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{B}u(t-1) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}(t-1)) - \mathbf{V}\hat{\mathbf{v}}(t-1) \right]$$
$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}(t-1) \\ \hat{\mathbf{v}}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_d \\ \mathbf{L}_v \end{bmatrix} \left[y_p(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{B}u(t-1) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}(t-1)) - \mathbf{V}\hat{\mathbf{v}}(t-1) \right]$$

En estado estacionario:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{L}_x \left[y_p(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}) - \mathbf{V}\hat{\mathbf{v}} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_d \\ \mathbf{L}_v \end{bmatrix} \left[y_p(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}) - \mathbf{V}\hat{\mathbf{v}} \right]$$

De modo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_d \\ \mathbf{L}_v \end{bmatrix} \left[y_p(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{D}\hat{\mathbf{d}}) - \mathbf{V}\hat{\mathbf{v}} \right] = 0$$



Añadir un modelo de perturbación



$$\begin{bmatrix} L_d \\ L_v \end{bmatrix} [y_p(t) - C(A\hat{x} + Bu + D\hat{d}) - V\hat{v}] = 0 \quad \text{Si } [L_d', L_v'] \text{ es de rango completo:}$$

$$y_p(t) = C(A\hat{x} + Bu + D\hat{d}) + V\hat{v} \quad \text{y de la ecuación de x:}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + D\hat{d}$$

$$y_p(t) = C\hat{x} + V\hat{v}$$

De modo que el modelo extendido proporciona predicciones no sesgadas en estado estacionario si se incorporan las perturbaciones al modelo

La política de supresión del error estacionario, en este caso, usa objetivos ficticios tales que, cuando se aplican al MPC, el proceso alcanza los verdaderos valores deseados w . Incluye, pues, dos pasos: el cálculo de los objetivos ficticios y el cálculo del MPC modificado



Consignas modificadas

Dadas las perturbaciones estimadas, buscamos estados x_s y entradas u_s que, satisfaciendo las ecuaciones de estimación en estado estacionario, proporcionen valores de la salida tan próximos como sea posible a las consignas w . Pueden obtenerse resolviendo el problema:

$$\min_{x_s, u_s} (w - y_s)' Q (w - y_s)$$

$$x_s = Ax_s + Bu_s + D\hat{d}$$

$$y_s = Cx_s + V\hat{v}$$

$$u_{\min} \leq u_s \leq u_{\max}$$

Notese que, si la consigna w es alcanzable, este problema proporcionará un valor en estado estacionario $y_s = w$, con

$$w = Cx_s + V\hat{v}$$

Q matriz de peso



Problema MPC modificado

$$\min_{\bar{u}(t+j+1), \dots, \bar{u}(t+j+N_u-1)} \sum_{j=0}^{\infty} [(\bar{x}(t+j)'C'QC\bar{x}(t+j) + \bar{u}(t+j)'R\bar{u}(t+j) + \Delta\bar{u}(t+j)'S\Delta\bar{u}(t+j)]$$

$$\bar{x}(t+j+1) = A\bar{x}(t+j) + B\bar{u}(t+j)$$

R,S weighting matrixes

$$\bar{x}(t+j) = \hat{x}(t+j) - x_s$$

$$\bar{u}(t-1) = u(t-1) - u_s \quad \bar{u}(t+j) = 0, \quad j \geq N_u$$

$$\Delta\bar{u}(t+j) = \bar{u}(t+j) - \bar{u}(t+j-1)$$

$$u_{\min} \leq \bar{u}(t+j) + u_s \leq u_{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta\bar{u}(t+j) \leq \Delta u_{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1$$

Si existe una solución factible y estable, este problema modificado llevará los estados y controles óptimos a cero, esto es, en estado estacionario:

$$\bar{x} = \hat{x} - x_s = 0, \quad \bar{u} = u - u_s = 0$$

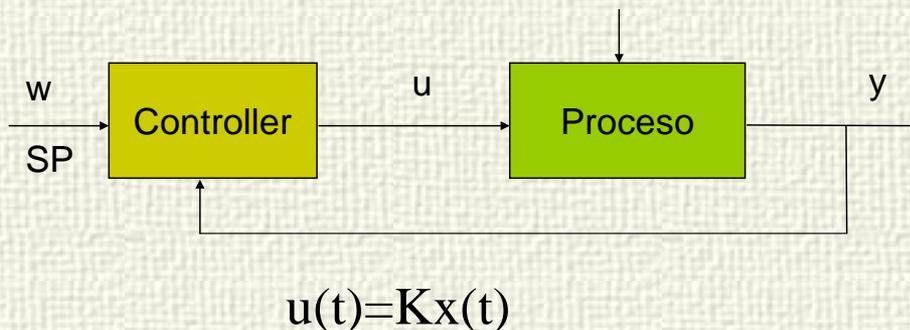
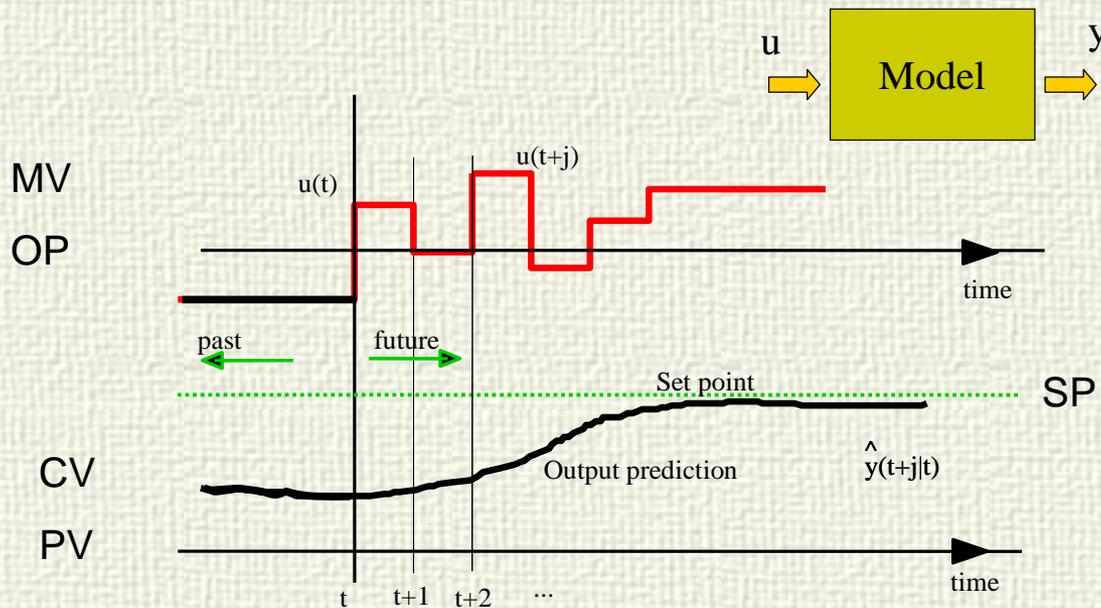
y teniendo en cuenta la solución del observador y los objetivos modificados en estado estacionario

$$w = Cx_s + V\hat{v} \Rightarrow C\hat{x} + V\hat{v} = y_p$$

Lo que da una solución sin error estacionario



MPC – Optimal control



MPC **NO** es control óptimo

Se resuelve un problema de optimización en lazo abierto cada periodo de muestreo partiendo del estado actual

$u(t)$, $u(t+1)$, $u(t+2)$... se consideran por tanto variables independientes en la optimización

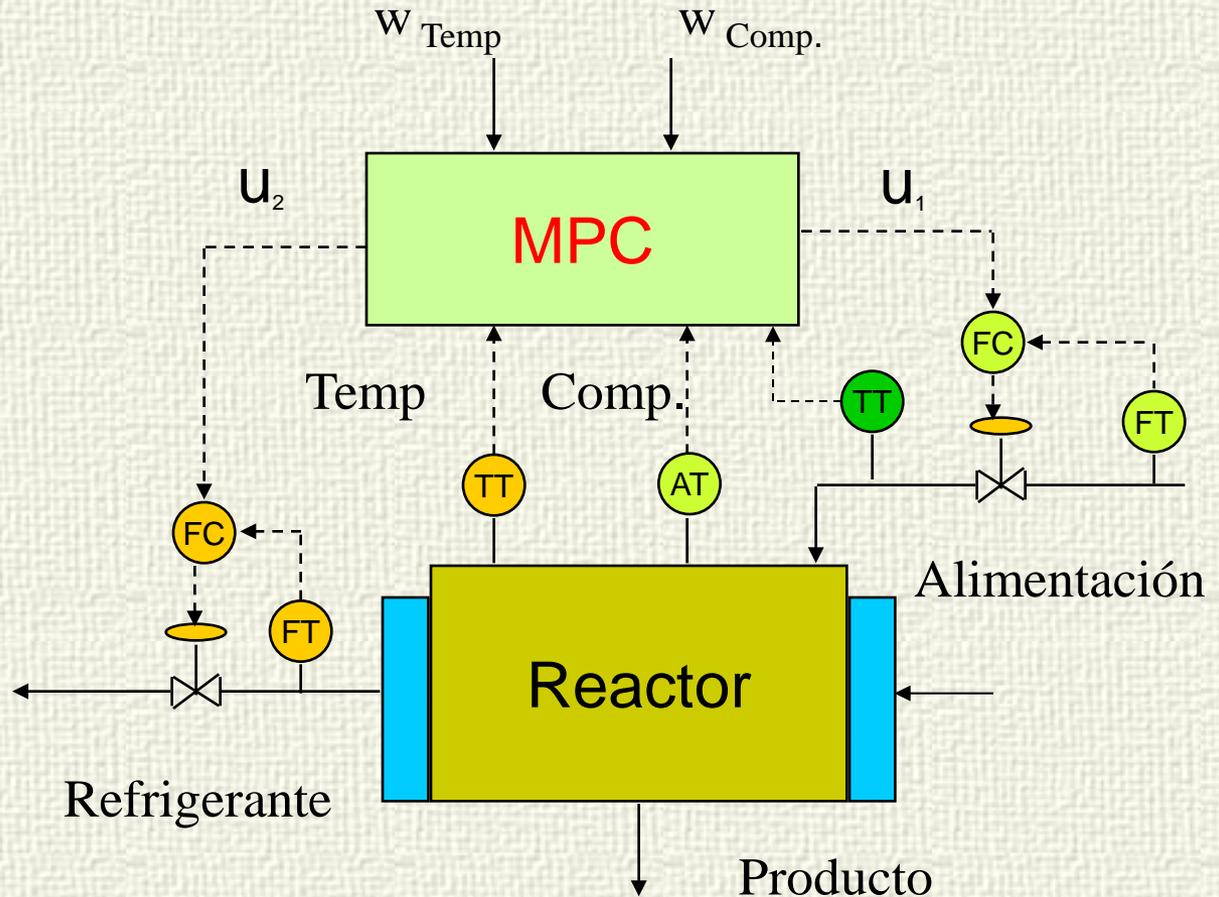
En control óptimo $u(t+j)$ no son independientes y se calcula K en una ley $u = Kx$



Optimización Económica

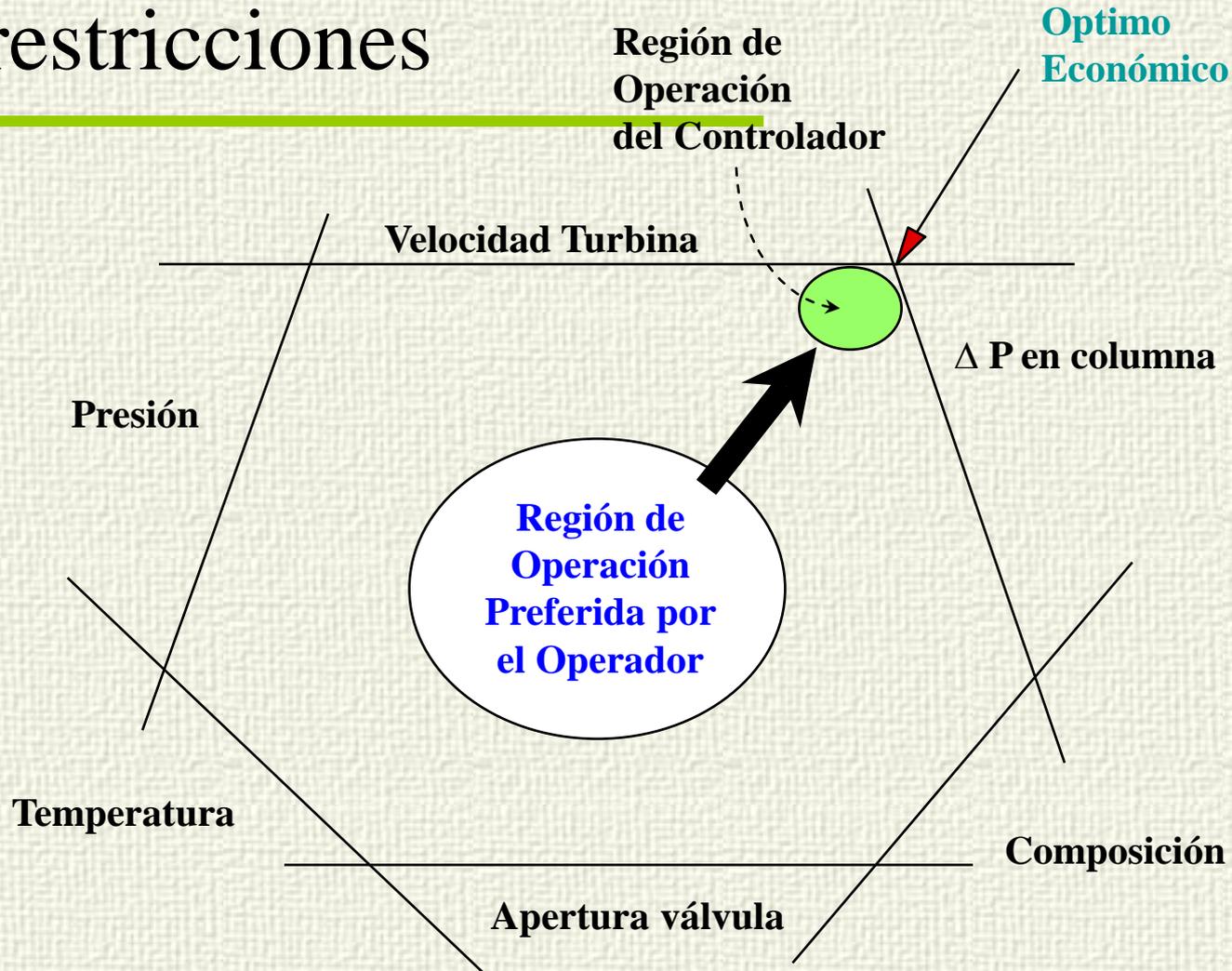
¿Cual es el punto de trabajo que genera mayor beneficio?

¿Como ajustar las referencias W_{Temp} , W_{Comp} a ese punto?





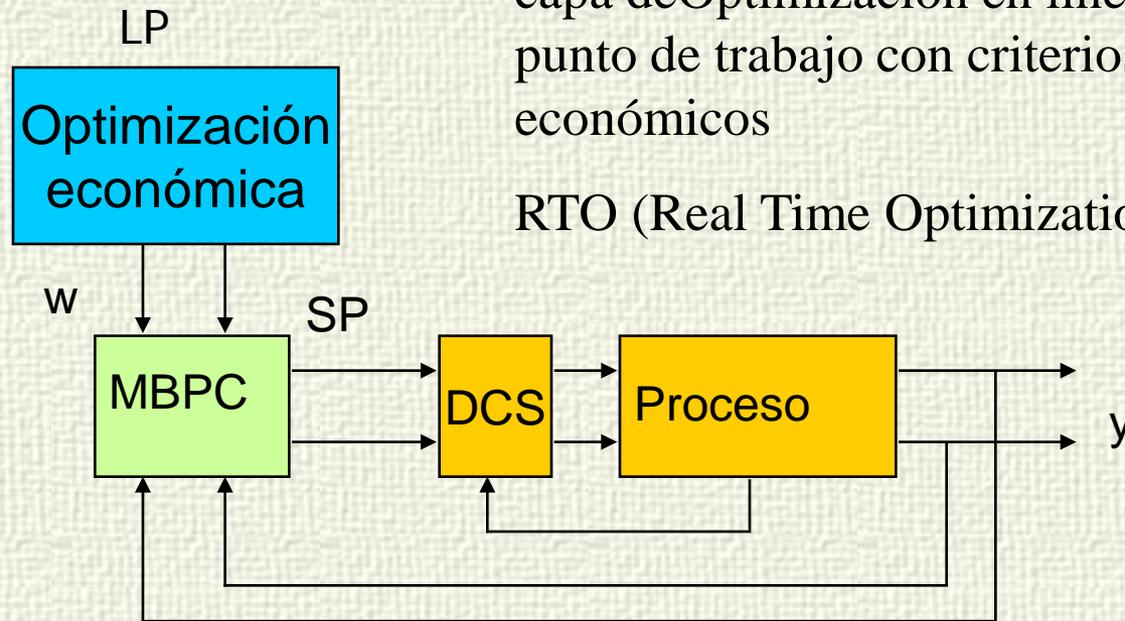
Optimización con restricciones





Optimización de consignas

Tendencia:
Combinar las
dos capas en un
solo MPC
donde el
criterio es
directamente
económico



Muchos sistemas incorporan una capa de Optimización en línea del punto de trabajo con criterios económicos

RTO (Real Time Optimization)



Optimización Económica

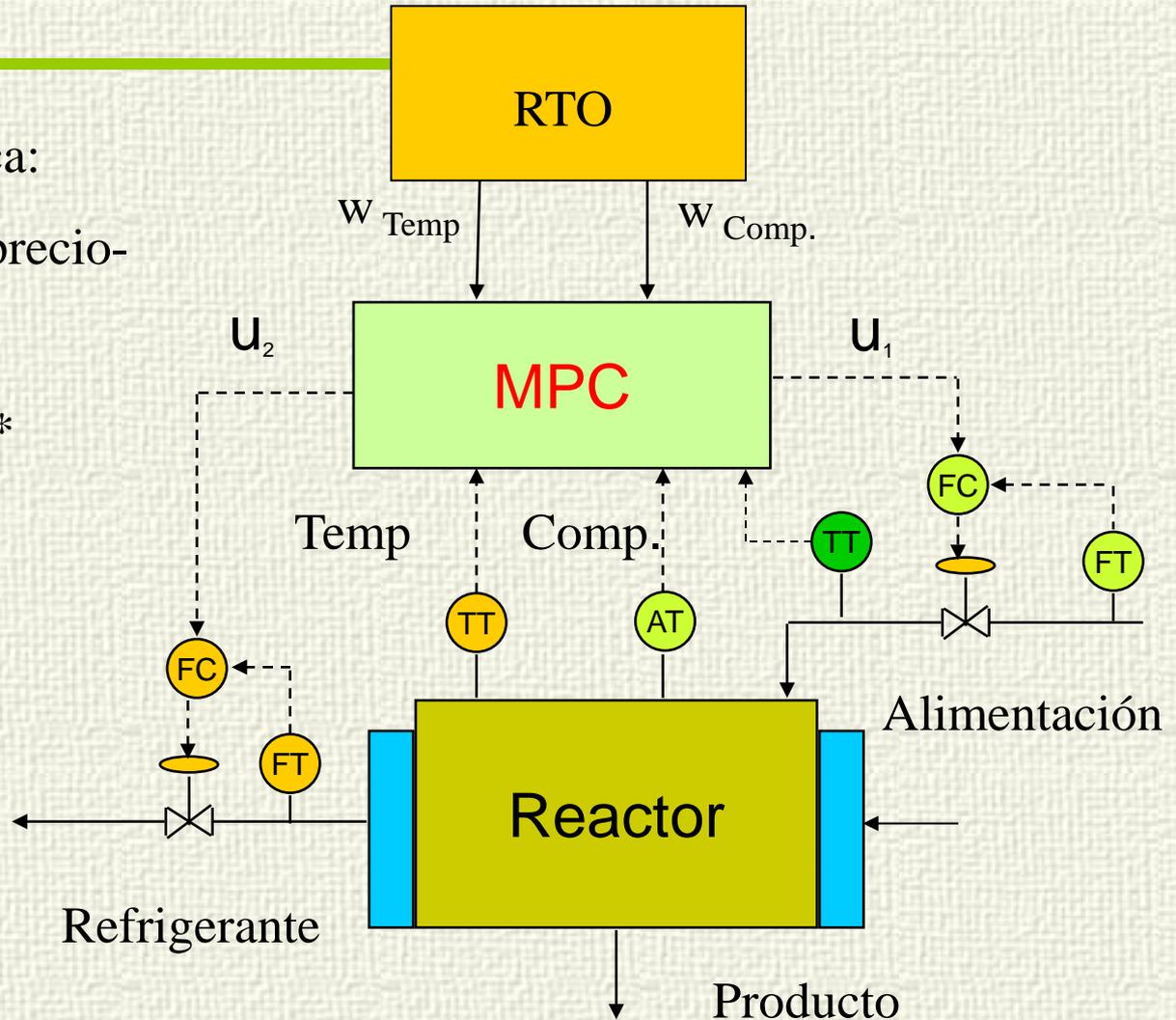


Función de costo económica:

$(\text{Producto} * \text{concentración} * \text{precio} -$
 $- \text{materia prima} * \text{precio} -$
 $- \text{Flujo refrigerante} * \text{precio}) *$
tiempo

Max Beneficio

sujeto a las
restricciones del
modelo y las de
operación





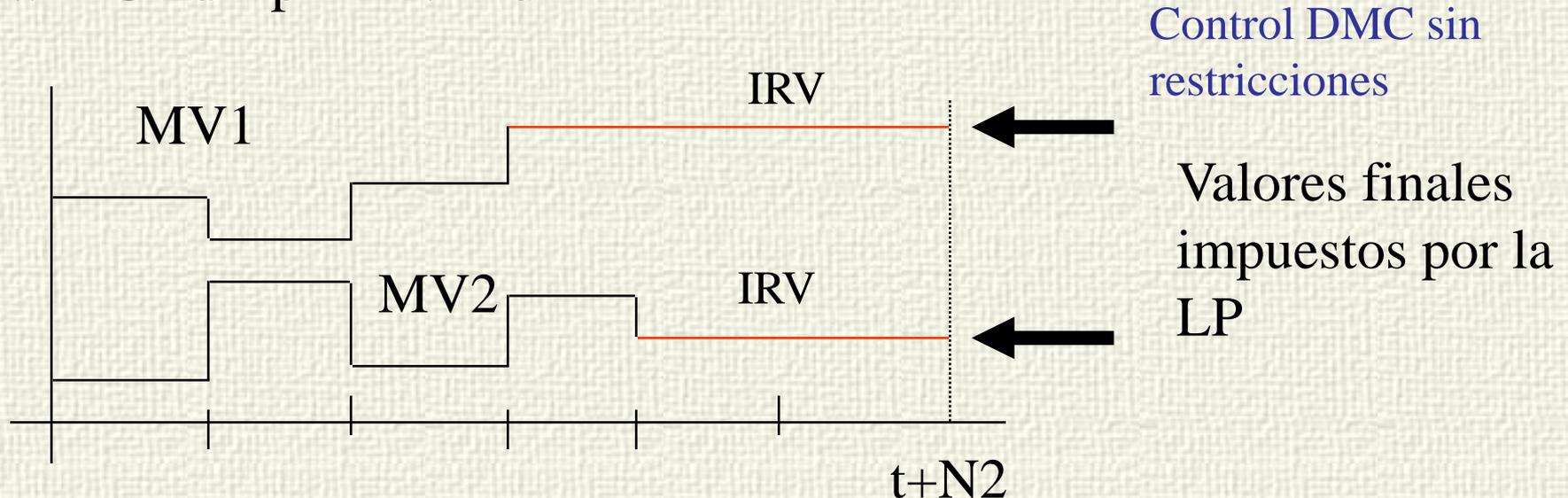
DMC Plus

min función lineal económica de u en estado estacionario LP
 Δu

Con las restricciones del modelo en estado estacionario: $y = G \Delta u + p$
rango de u e y

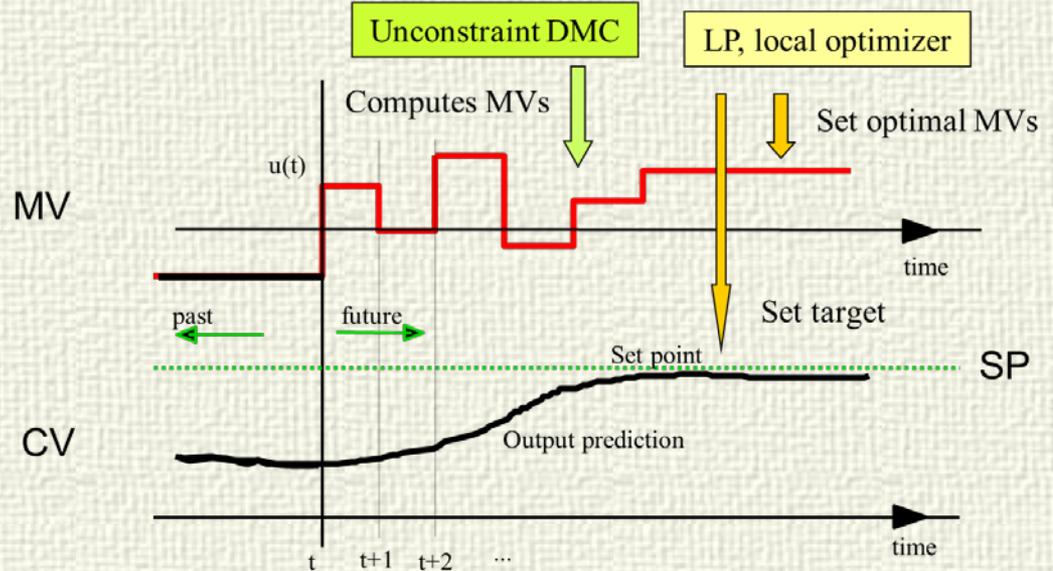
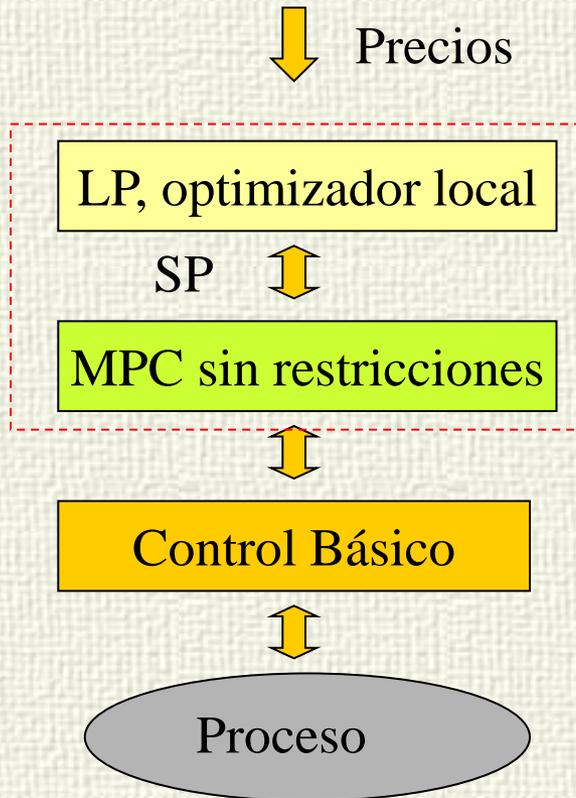
La solución proporciona set points estacionarios para CV y IRV

$$w = G \Delta u^* + p \quad \text{IRV} = u^*$$





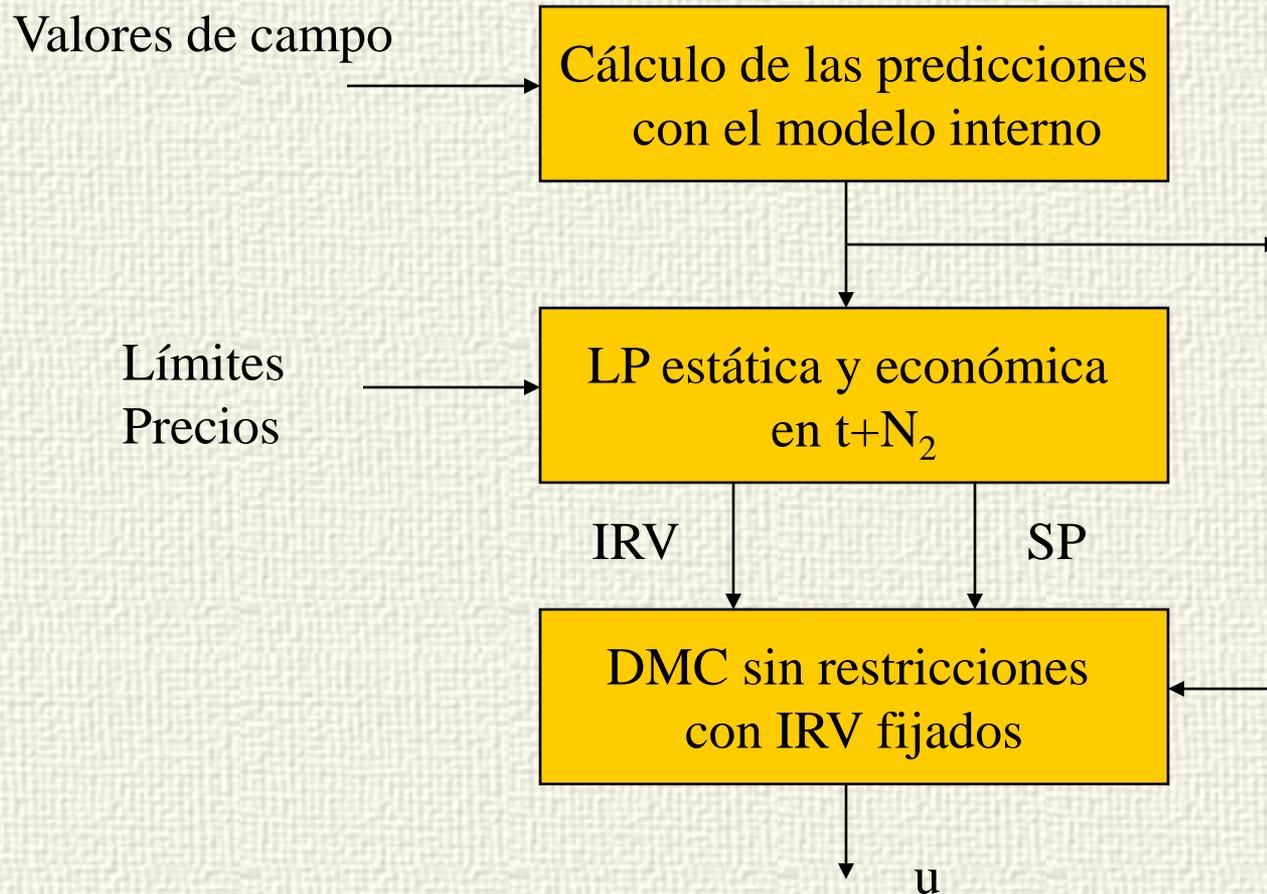
DMC Plus



Implementación industrial



DMC Plus





HITO Optimización Económica

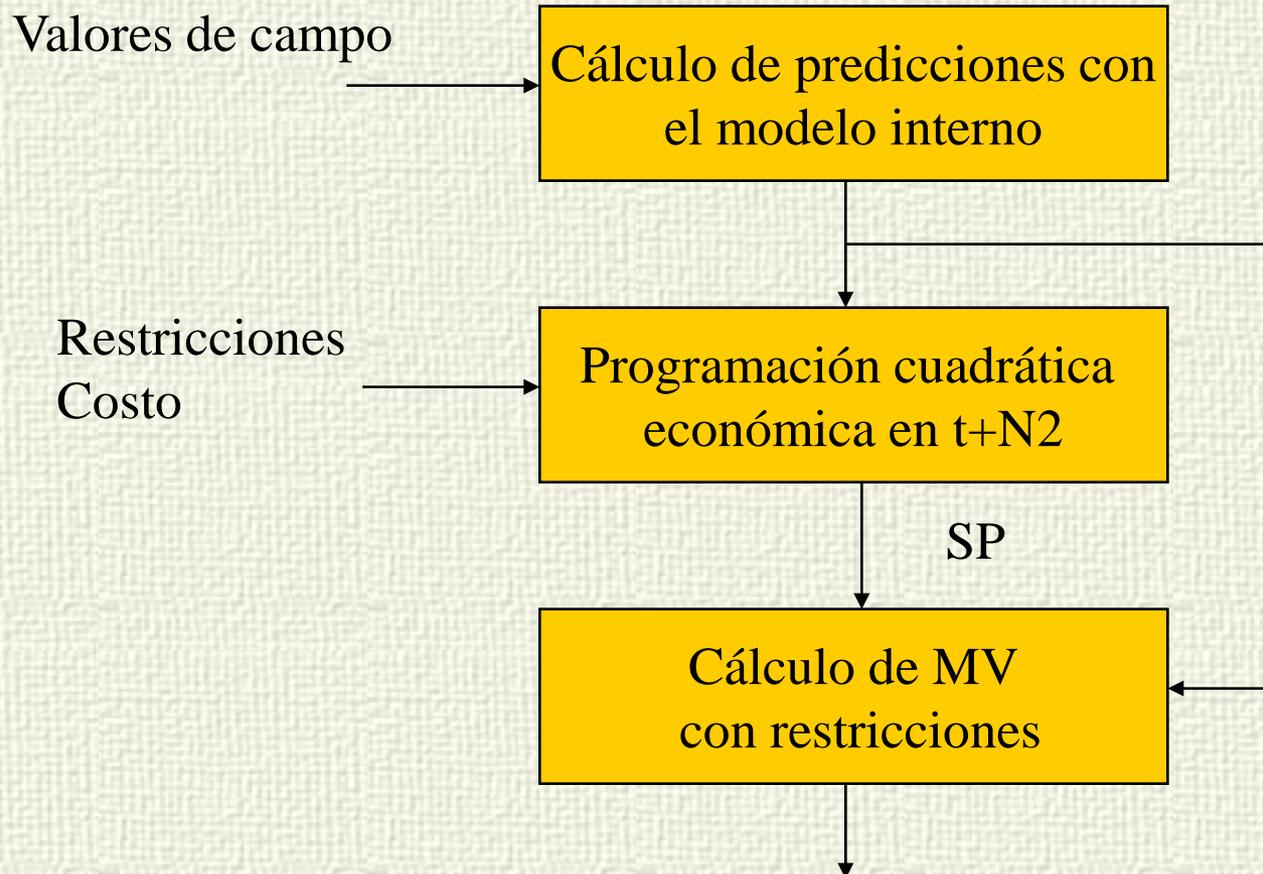
- Cual es el mejor estado alcanzable futuro?
- Optimización local entre los puntos alcanzables en $t + N2$
- Modelo dinámico que tiene en cuenta restricciones y perturbaciones
- El procedimiento se repite cada periodo de muestreo
- Los SP generados son siempre factibles



Estados alcanzables
en $t+N2$



Optimización con HITO





Aceptación industrial

S.J. Qin, T.A. Badgwell / Control Engineering Practice 11 (2003) 733–764

745

Table 6
Summary of linear MPC applications by areas (estimates based on vendor survey; estimates do not include applications by companies who have licensed vendor technology)^a

Area	Aspen Technology	Honeywell Hi-Spec	Adersa ^b	Invensys	SGS ^c	Total
Refining	1200	480	280	25		1985
Petrochemicals	450	80	—	20		550
Chemicals	100	20	3	21		144
Pulp and paper	18	50	—	—		68
Air & Gas	—	10	—	—		10
Utility	—	10	—	4		14
Mining/Metallurgy	8	6	7	16		37
Food Processing	—	—	41	10		51
Polymer	17	—	—	—		17
Furnaces	—	—	42	3		45
Aerospace/Defense	—	—	13	—		13
Automotive	—	—	7	—		7
Unclassified	40	40	1045	26	450	1601
Total	1833	696	1438	125	450	4542
First App.	DMC:1985 IDCOM-M:1987 OPC:1987	PCT:1984 RMPCT:1991	IDCOM:1973 HIECON:1986	1984	1985	
Largest App.	603 × 283	225 × 85	—	31 × 12	—	