Examen de la Asignatura “Optimización de Procesos”

5º curso de Ingeniería Química **Junio 2011**

Tiempo: 3 h.

Problema 1

En una factoría hay que procesar un flujo dado F m^3/h de un producto que se obtiene de un tanque de almacenamiento calentándolo en cuatro unidades térmicas que operan en paralelo. Las capacidades máximas de proceso de dichas unidades vienen dadas en la tabla adjunta, así como los costos de procesar 1 m^3/h. Se dispone de un máximo de tres operarios para atender las unidades, bien entendido que una unidad no puede operar si no tiene asignado un operador, siendo el costo hora de cada operario 10€.

Unidad	1	2	3	4
Capacidad	40 m^3/h	60 m^3/h	70 m^3/h	90 m^3/h
Costo	50 €/m^3/h	48 €/m^3/h	52 €/m^3/h	56 €/m^3/h

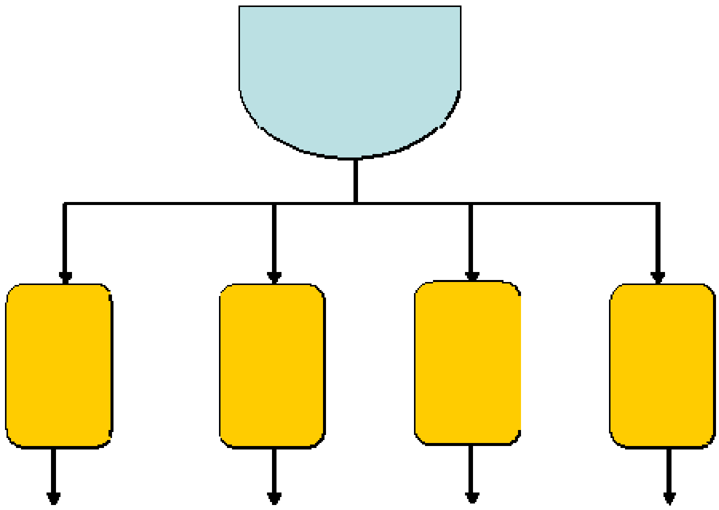

Fig.1

Se desea saber como se ha de procesar el producto de forma que se minimicen los costos totales.

1. Formular el problema como uno de optimización
2. Decir cuales y cuantas son sus variables de decisión
3. Decir que tipo de problema se ha planteado y que métodos serian adecuados para resolverlo
4. ¿Es un problema convexo?

Problema 2

Una planta química dispone de tres reactores batch denominados R1, R2 y R3 con los que pueden fabricarse tres productos A, B y C. El tiempo semanal total disponible en los reactores para la fabricación de esos productos está dado en la tabla adjunta, en la que también puede verse el tiempo necesario para hacer un lote de cada producto en cada reactor. Un espacio en blanco indica que ese producto no puede obtenerse en ese reactor. Los productos A y B tienen un mercado superior a las capacidades de producción, pero para el C se estima en un máximo de 20 lotes por semana, siendo el beneficio estimado por lote de 200, 80 y 90€ respectivamente.

reactor	Tiempo semanal disponible	Producto A: horas por batch	Producto B: horas por batch	Producto C: horas por batch	Kg por lote
R1	100	8	2	3	50
R2	65	4	3		50
R3	75	2		1	50

¿Qué cantidades deben producirse de cada producto para maximizar el beneficio semanal?

1 Formular el problema como uno de optimización.
2 ¿Cuantas y cuales son las variables de decisión?
3. ¿Qué tipo de problema resulta y qué métodos de solución conoces para este problema?
4. Formular el problema dual

Examen de la Asignatura "Optimización de Procesos"

5º curso de Ingeniería Química **Junio 2011**

Tiempo: 1 h.

Cuestiones

1) ¿Qué son y para que se utilizan los multiplicadores de Lagrange?

2) ¿Qué es y para que se utiliza el algoritmo BFGS?

3) Convertir el problema de optimización

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \quad x_1^2 - 7x_2 - x_1 x_2 + x_2^2 \\
&\text{sujeto a :} \\
&\log(x_2) + 12\exp(-x_1) \le 40 \\
&x_1 - 2x_2 = 2
\end{aligned}$$

En otro equivalente sin restricciones

4) Escribir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema:

$$\begin{aligned}
&\min \quad x_1 + x_1 x_2 - \log(x_2) \\
&x_2 e^{-x_1} \le 3 \\
&\cos(x_1) + x_2 = 0.5 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

5) Estudiar la convexidad del problema:

$$\begin{aligned}
&\min \quad 4x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \\
&-\cos(e^{-x_2^2}) + x_1^2 \le 3 \\
&x_2 - \cos(x_1) = 0.5 \\
&x_2 \ge 0 \\
&0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Problema 1

Las variables de decisión corresponden al flujo F_i que se envía a cada unidad i= 1,2,3,4
Se define la variable binaria y_i para indicar si una unidad tiene asignado operario o no.

Se denomina D_i a la capacidad de tratamiento de la unidad i
Se denomina c_i al costo de procesar un m^3/h en la unidad i

Hay que minimizar los costos totales, proceso de producto más personal

$$\sum_i F_i c_i + \sum_i 10 y_i$$

Restricciones:

Se debe procesar el caudal F entre todas las unidades
Límite de flujo en cada unidad impuesto por su capacidad. Si no hay operario asignado el flujo debe ser cero
El número máximo de operarios es tres.

$$\sum_i F_i = F$$
$$0 \le F_i \le D_i y_i$$
$$\sum_i y_i \le 3$$

Problema 2

Las variables de decisión son el número de lotes que se procesan de cada producto i en cada reactor j, x_{ij} i= 1, 2, 3 j = 1, 2 ,3

Denominamos T_j a las horas semanales disponibles en el reactor j
Denominamos a_{ij} las horas que tarda un lote del producto i en procesarse en el reactor j
Denominamos P_i al número de lotes fabricados por semana del producto i
Denominamos D_i a la demanda máxima del mercado para el producto i
Denominamos b_i al beneficio obtenido al vender un lote del producto i

Se maximizan las ganancias con las restricciones de ocupación de tiempo en cada reactor y de demanda máxima. Las cantidades en kg son $50P_i$

$$\max \quad \sum_i P_i b_i$$
$$\sum_i a_{ij} x_{ij} \le T_j \quad j = 1,2,3$$
$$P_i = \sum_j x_{ij} \quad i = 1,2,3$$
$$P_3 \le D_3$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad x_{23} = x_{32} = 0$$

$$\max \quad \sum_i \sum_j x_{ij} b_i$$
$$\sum_i a_{ij} x_{ij} \le T_j \quad j = 1,2,3$$
$$\sum_j x_{3j} \le D_3$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad x_{23} = x_{32} = 0$$

$$\text{Max}\ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & & b_1 & & b_3 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{13} \\ x_{33} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ D_3 \\ \\ \end{bmatrix} \quad x \ge 0$$

El dual de

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{c'x}$$
$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \quad \text{es}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\min_{z} \mathbf{b'z}$$
$$\mathbf{A'z} \ge \mathbf{c}$$
$$\mathbf{z} \ge \mathbf{0}$$

z de dimensión 4

Alternativa de modelado con x de dimensión 9

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & 10^6 & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad x \ge 0$$

Una solución factible implica que x_{23} y x_{32} sean cero

También puede interpretarse que x_{ij} son enteros en cuyo caso seria un problema ILP

Cuestiones

1) ¿Qué son y para que se utilizan los multiplicadores de Lagrange?

2) ¿Qué es y para que se utiliza el algoritmo BFGS?

3) Convertir el problema de optimización

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \quad x_1^2 - 7x_2 - x_1x_2 + x_2^2 \\
&\text{sujeto a:} \\
&\log(x_2) + 12\exp(-x_1) \leq 40 \\
&x_1 - 2x_2 = 2
\end{aligned}$$

En otro equivalente sin restricciones

Usando funciones de penalización:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad x_1^2 - 7x_2 - x_1x_2 + x_2^2 + \alpha\left(\max(0, \log(x_2) + 12\exp(-x_1) - 40)\right)^2 + \beta(x_1 - 2x_2 - 2)^2$$

4) Escribir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema:

$$\begin{aligned}
&\min \quad x_1 + x_1x_2 - \log(x_2) \\
&x_2 e^{-x_1} \leq 3 \\
&\cos(x_1) + x_2 = 0.5 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

La Lagrangiana:

$$L = x_1 + x_1x_2 - \log(x_2) + \lambda(\cos(x_1) + x_2 - 0.5) + \mu_1(x_2e^{-x_1} - 3) - \mu_2 x_2$$

Condiciones KKT:

$$L = x_1 + x_1x_2 - \log(x_2) + \lambda(\cos(x_1) + x_2 - 0.5) + \mu_1(x_2e^{-x_1} - 3) - \mu_2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + x_2 - \lambda\cos(x_1)\mathrm{sen}(x_1) - \mu_1x_2e^{-x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = +x_1 + \frac{1}{x_2} + \lambda x_2 + \mu_1e^{-x_1} - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \cos(x_1) + x_2 - 0.5 = 0$$

$$\mu_1(x_2e^{-x_1} - 3) = 0 \qquad \mu_2x_2 = 0 \qquad x_2e^{-x_1} \leq 3 \qquad x_2 \geq 0$$

$$\mu_1 \geq 0 \qquad \mu_2 \geq 0$$

5) Estudiar la convexidad del problema:

$$\min \quad 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$-\cos(e^{-x_2^2}) + x_1^2 \leq 3$$

$$x_2 - \cos(x_1) = 0.5$$

$$x_2 \geq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

El Hessiano de la función de costo es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1x_2} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_2x_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$|H - \lambda I| = \det\begin{bmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$12 - 10\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{2} = 8.6 \quad ,1.39$$

H es PD luego la función de costo es convexa

x_2^2 en convexa y - x_2^2 es cóncava y e^{-u} es convexa y decreciente , luego $e^{-x_2^2}$ es convexa. Como –cos(u) en [0, π/2] es convexa y creciente, entonces $-\cos(e^{-x_2^2})$ es convexa. También x_1^2 es convexa y, por tanto, la primera desigualdad es convexa.

- x_2 es lineal y por tanto la segunda desigualdad es también convexa y lo mismo ocurre con la tercera.

Sin embargo la restricción de igualdad $x_2 - \cos(x_1)=0.5$ es no lineal y, por tanto, no es convexa y el problema es no convexo.