Examen de la Asignatura “Optimización de Procesos”

5º curso de Ingeniería Química **Junio 2010**

Tiempo: 3 h.

Problema 1

En un cierto proceso de producción de una refinería representado en la Figura 1, dos corrientes V_1 y V_2 que llevan azufre en porcentajes en peso del 3% y 1% respectivamente se mezclan dando lugar a un producto intermedio. Los costos de los productos que constituyen ambas corrientes son 6 y 16 €/kg respectivamente. Esta mezcla se calienta y se utiliza para hacer dos productos finales P_1 y P_2 en otros dos sistemas de mezcla con una tercera corriente F que tiene un porcentaje de azufre del 2% y cuyo costo es de 10 €/kg. El primero de estos productos de mezcla final, P_1, se desea que tenga una composición máxima del 2.5% de azufre y se espera una máxima demanda de 100 kg/h del mismo, mientras que P_2 se desea que no tenga azufre en un porcentaje superior al 1.5% y se espera que su máxima demanda sea inferior a 200 Kg/h. Se sabe que P_1 y P_2 se venden respectivamente a 9 y 10 €/kg y los costes de calentamiento se estiman en 1 €/(Kg/h)h. Se desea saber como operar el proceso de forma que se maximice el beneficio diario.

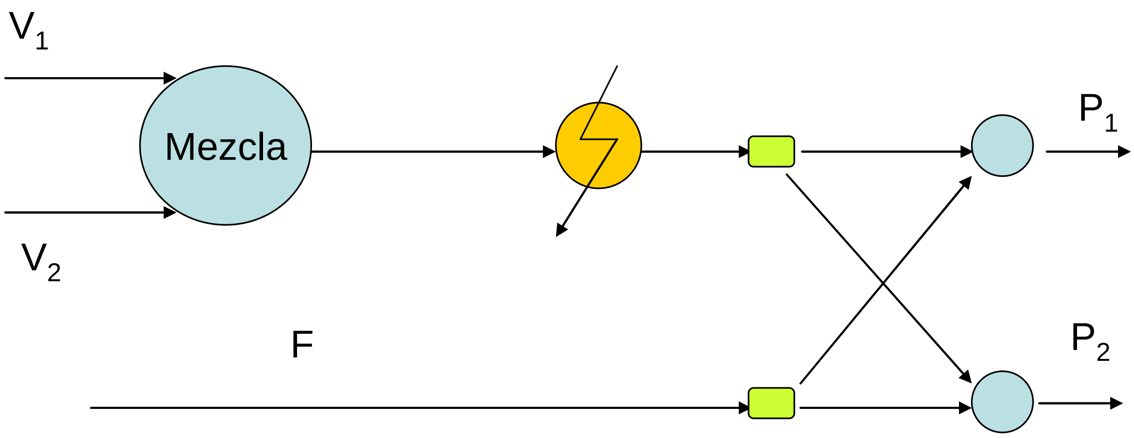


Figura 1

1 Formular un problema como uno de optimización.
2 ¿Cuantas y cuales son las variables de decisión de este problema?
3 Decir que tipo de problema resulta, indicar los métodos que serían adecuados para resolverlo y seleccionar uno razonando la selección.
4 ¿Podrían obtenerse soluciones distintas si el método escogido funciona bien?

Problema 2

Una planta química dispone de tres reactores continuos cada uno de un modelo R1, R2 y R3 con los que puede fabricarse un cierto producto A. Otras partes de la planta requieren cantidades variables de A lo largo del día de acuerdo a la siguiente tabla 1:

Tabla 1

Periodo	Horas comienzo/ fin	Cantidad
Mañana	8 am a 2 pm	900 kg/h
Tarde	2 pm a 10 pm	1200 kg/h
Noche	10 pm a 8 am	500 kg/h

Cada tipo de reactor puede trabajar entre un máximo y un mínimo de acuerdo a los valores reflejados en la tabla 2, con unos costes de operación también reflejados en la misma. Si un reactor está parado tiene unos costes asociados de mantenimiento y otros de puesta en marcha cuando se le arranca.

Tabla 2

Tipo reactor	Capacidad mínima Kg/h	Capacidad máxima Kg/h	Coste operación €/kg	Coste de mantenimiento parado €/h	Coste de puesta en marcha
R1	200	850	20	2	200 €
R2	125	175	13	4	100 €
R3	150	400	30	3	50 €

¿Qué reactores y con qué producción deberían estar trabajando en cada periodo del día para minimizar los costos de producción diarios? La producción es continua.

1 Formular el problema como uno de optimización.
2 ¿Qué tipo de problema resulta?
3 ¿Cuantas y cuales son las variables de decisión?
4 ¿Qué métodos de solución conoces para este problema?

Examen de la Asignatura “Optimización de Procesos”

5º curso de Ingeniería Química **Junio 2010**

Tiempo: 1 h.

Cuestiones

1) Dado el problema:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}} \quad x_1^2 - 7x_2 - x_1x_2 + x_2^2 \\
&\text{sujeto a:} \\
&4x_1 - \log(x_2) + 12\exp(-|x_1|) \le 40 \\
&x_1 - 2x_2 \le 2 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

¿Es convexo? Razonar la respuesta

2) ¿Cual es el fundamento de los métodos tipo GRG de optimización?

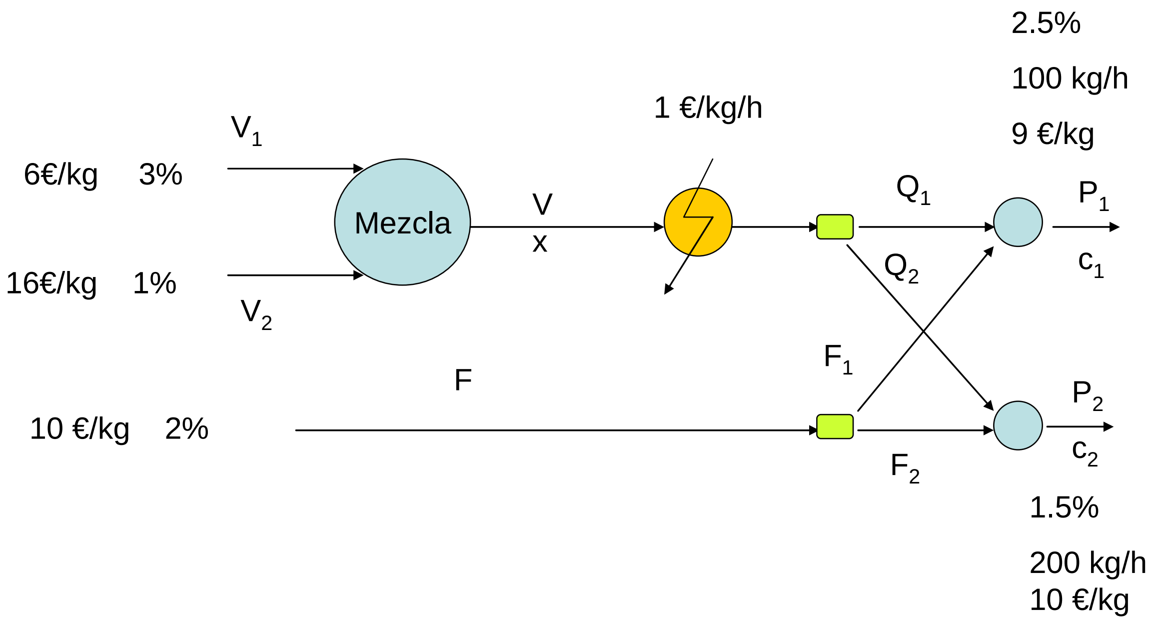
3) Escribir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad x_1 + 10\log(x_1x_2) \\
&x_1 + x_2e^{-x_1} \le 3 \\
&\sin(x_1) + x_2 = 0.5 \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

4) Que podrías decir sobre el problema del ejercicio 1) si el valor del multiplicador de Lagrange asociado a la ecuación $x_1 - 2x_2 \le 2$ valiera 3.

5) Suponiendo que solo dispones de un software de optimización que implementa el método de Newton-Raphson, ¿Podrías resolver con el problema del apartado 3)? En caso de respuesta afirmativa, ¿que harías para ello?

Problema 1



$V_1, V_2, V, F, F_1, F_2, Q_1, Q_2, P_1, P_2$ caudales
x, c_1, c_2 concentraciones de azufre

Se trata de determinar los caudales y las concentraciones de azufre x, c_1, c_2 que maximizan el beneficio diario:

$$\max \quad 24(9P_1 + 10P_2 - 6V_1 - 16V_2 - 10F) - V24$$

Las variables de decisión son las anteriores, 13, y están sujetas a las restricciones:

Balances de masa:

$$V = V_1 + V_2$$
$$V = Q_1 + Q_2$$
$$P_1 = Q_1 + F_1$$
$$F = F_1 + F_2$$
$$P_2 = Q_2 + F_2$$
$$Vx = 0.03V_1 + 0.01V_2$$
$$P_1c_1 = Q_2x + 0.02F_2$$
$$P_2c_2 = Q_2x + 0.02F_2$$

$$0 \le P_1 \le 100$$
$$0 \le P_2 \le 200$$
$$0 \le c_1 \le 0.015$$
$$0 \le c_2 \le 0.025$$

Problema NLP no convexo luego puede tener mínimos locales

Problema 2

Definimos:
i tipo de reactor (R1, R2, R3)
j periodo de trabajo (mañana, tarde, noche)

F_{ij} producción del reactor i en el periodo j
M_i máxima producción del reactor i
m_i mínima producción del reactor i si trabaja
y_{ij} = 1 si el reactor i trabaja en el periodo j
D_j demanda en el periodo j
d_j duración de la etapa
B_i costos de mantenimiento del reactor i parado
P_i costos de puesta en marcha del reactor i
C_i costos de operación del reactor i

Se trata de minimizar los costos: de producción de los reactores que funcionan, más los de mantenimiento de los que están parados y de los que han arrancado en ese periodo.

$$\min_{F_{ij}, y_{ij}} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} C_i d_j F_{ij} + (1 - y_{ij}) B_i d_j + P_i \max(0, (y_{ij} - y_{i,j-1}))$$

$$y_{i0} = y_{i3}$$

Se debe cubrir la demanda de cada periodo

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ij} \geq D_j \quad j = 1,2,3$$

La producción de cada reactor debe estar dentro de límites y ser cero si no funciona

$$y_{ij} m_i \leq F_{ij} \leq y_{ij} M_i \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

Cuestiones

1)

$$\max_{\mathbf{x}} \ x_1^2 - 7x_2 - x_1 x_2 + x_2^2$$

sujeto a :

$$4x_1 - \log(x_2) + 12\exp(-|x_1|) \leq 40$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0$$

La función de costo puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 7x_2$$

La convexidad de la función de coste viene dada por el carácter de

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Que es positiva definida, por lo que la función es convexa.

Sin embargo, las restricciones no forman un conjunto convexo porque el término exp(-$|x_1|$) no lo es, luego no podemos decir que sea un problema convexo.

3)
Las condiciones KKT para

$$\begin{aligned}
&\min \quad x_1 + 10\log(x_1 x_2) \\
&x_1 + x_2 e^{-x_1} \le 3 \\
&\sin(x_1) + x_2 = 0.5 \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

son

$$\begin{aligned}
&L = \quad x_1 + 10\log(x_1 x_2) + \lambda(\sin(x_1) + x_2 - 0.5) + \\
&+ \mu_1(x_1 + x_2 e^{-x_1} - 3) - \mu_2 x_1 - \mu_3 x_2 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + \frac{10}{x_1} + \lambda\cos(x_1) + \mu_1(1 - x_2 e^{-x_1}) - \mu_2 = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{10}{x_2} + \lambda + \mu_1 e^{-x_1} - \mu_3 = 0 \\
&\mu_1(x_1 + x_2 e^{-x_1} - 3) = 0 \\
&\mu_2 x_1 = 0 \\
&\mu_3 x_2 = 0 \\
&x_1 + x_2 e^{-x_1} \le 3 \\
&\sin(x_1) + x_2 = 0.5 \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}$$