**Examen de la Asignatura "Optimización de Procesos"**

5º curso de Ingeniería Química **Julio 2010**

Tiempo: 3 h.

**Problema 1**

Una empresa tiene dos factorías, una en Barcelona y otra en Sevilla. Además, tiene cuatro almacenes localizados en Bilbao, Zaragoza, Madrid y Valladolid y produce para seis grandes clientes $C_i$, i = 1,…,6. Los clientes pueden recibir sus productos desde un almacén o directamente desde una factoría. Los costos de distribución son fijos, los paga la empresa, y están recogidos en la tabla 1 en €/Ton para los tráficos posibles.

| Receptor | Suministrador | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Barcelona | Sevilla | Bilbao | Zaragoza | Madrid | Valladolid |
| Bilbao | 0.5 | | | | | |
| Zaragoza | 0.5 | 0.3 | | | | |
| Madrid | 1 | 0.5 | | | | |
| Valladolid | 0.2 | 0.2 | | | | |
| C1 | 1 | 2 | | 1 | | |
| C2 | | | 1.5 | 0.5 | 1.5 | |
| C3 | 1.5 | | 0.5 | 0.5 | 2 | 0.2 |
| C4 | 2 | | 1.5 | 1 | | 1.5 |
| C5 | | | | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| C6 | 1 | | 1 | | 1.5 | 1.5 |

Cada factoría tiene una capacidad de producción máxima mensual dada por:

Barcelona 150000 Ton
Sevilla 200000 Ton

Cada almacén es capaz de recibir una cantidad de productos por mes inferior a:

Bilbao 70000 Ton
Zaragoza 50000 Ton
Madrid 100000 Ton
Valladolid 40000 Ton

Y cada consumidor genera una demanda mensual, que debe ser satisfecha, de:

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Demanda | 50000 | 10000 | 40000 | 35000 | 60000 | 20000 |

La empresa desea saber cual es la forma de distribución que minimiza los costos de distribución. Se pide:
1) Formular el problema como uno de optimización
2) Decir de qué tipo es y cuantas y cuales son sus variables de decisión.
3) Escribir un programa en GAMS capaz de resolverlo
4) ¿Qué algoritmo de optimización podría usarse para resolverlo?

**Problema 2**

Dado el problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2} \; 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Se pide aplicar dos iteraciones del algoritmo del descenso más pronunciado partiendo del punto inicial (2,1) y con cotas sobre el gradiente de 0.001 y de 0.01 sobre las variables de decisión.

**Examen de la Asignatura “Optimización de Procesos”**

5º curso de Ingeniería Química **Julio 2010**

Tiempo: 1 h.

**Cuestiones**

1) ¿Para que se emplean las funciones de penalización y que tipos conoces?

2) ¿Cual es el problema dual de:

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 + 5x_2 \\ &x_1 - x_3 \leq 2 \\ &2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{aligned} \quad ?$$

3) Estudia la convexidad del problema:

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 + 5x_2 \\ &\frac{1}{x_1} - \log x_2 \leq 2 \\ &x_1 > 0,\ x_2 > 0 \end{aligned}$$

4) ¿Cual es el fundamento del método de Branch and Bound?

5) ¿Qué es un algoritmo genético?

**Problema 1**

Denominamos

i factorías 1,2
j almacenes 1,2,3,4
k clientes 1,2,3,4,5,6

$x_{ij}$ Ton de productos mensuales enviados desde la factoría i al almacén j
$y_{ik}$ Ton de productos mensuales enviados desde la factoría i al cliente k
$z_{jk}$ Ton de productos mensuales enviados desde el almacén j al cliente k

$P_i$ Capacidad de producción mensual de la factoría i
$A_j$ Capacidad de almacenamiento mensual del almacén j
$D_k$ Demanda mensual del cliente k

$f_{ij}$ €/Ton coste de envío de productos de la fábrica i al almacen j
$c_{ik}$ €/Ton coste de envío de productos de la fábrica i al cliente k
$a_{jk}$ €/Ton coste de envío de productos del almacén j al cliente k

Si no es factible el envío de un origen a un destino el coste se fija en $\infty$

Función de coste

$$\text{Min} \sum_{i,j} f_{ij}x_{ij} + \sum_{i,k} c_{ik}y_{ik} + \sum_{j,k} a_{jk}z_{jk}$$

Ecuaciones de conservación y restricciones

$\sum_j x_{ij} + \sum_k y_{ik} \le P_i \quad i = 1,2$ cada factoría tiene una capacidad de producción limitada

$\sum_i x_{ij} \le A_j \quad j = 1,2,3,4$ cada almacén tiene una capacidad limitada

$\sum_i y_{ik} + \sum_j z_{jk} = D_k$ cada cliente tiene una demanda determinada

$\sum_i x_{ij} = \sum_k z_{jk} \quad j = 1,2,3,4$ balance en cada almacén

$x_{ij}$ , $y_{jk}$, $z_{jk}$ deben ser positivos o cero

**Problema 2**

$$J(x) = x'Cx = x'\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$g(x) = 2Cx \qquad \sigma_k^* = \frac{\|g(x_k)\|^2}{g(x_k)'2Cg(x_k)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{\|g(x_k)\|^2}{g(x_k)'2Cg(x_k)} g(x_k)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \sigma_k g(x_k) \\ \min_{\sigma_k} J(x_k - \sigma_k g(x_k)) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \qquad g(2,1) = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \|g(2,1)\|^2 = 14^2 + 8^2 = 260$$

$$\sigma_k^* = \frac{260}{(14,8)2C(14,8)'} = \frac{260}{1880} = 0.138 \qquad x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.138 \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.064 \\ -0.106 \end{bmatrix}$$

$$g(0.064,-0.106) = \begin{bmatrix} 0.172 \\ -0.296 \end{bmatrix} \qquad \|g(0.064,-0.106)\|^2 = 0.117$$

Como el modulo del gradiente es mayor que la cota y el cambio es la x mayor que la suya, se continua iterando

**Cuestiones**

2)

$$\min 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 - x_3 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

Forma matricial

$$\max \begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

Dual:

$$\min \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z \ge 0$$

También

$$\max \begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

Dual:

$$\min \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3)

$$\min 3x_1 + 5x_2$$
$$\frac{1}{x_1} - \log x_2 \le 2$$
$$x_1 > 0,\ x_2 > 0$$

La función objetivo es lineal, luego es convexa

La segunda restricción es suma de funciones convexas, luego es convexa.
Las últimas son lineales, luego son convexas y el problema es convexo