Estimación de estados

Prof. Cesar de Prada

Dpt. Ingeniería de Sistemas y Automática

prada@autom.uva.es

ISA-UVA

Modelo discretizado

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

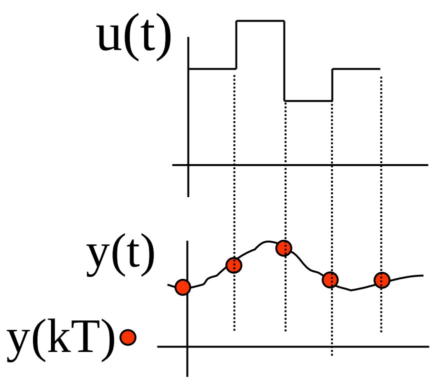
$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT)$$

$$y(kT) = Cx(kT)$$

$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \, B$$

Matlab c2d

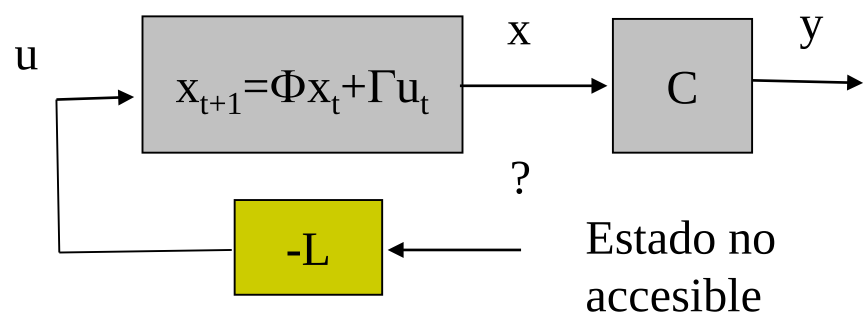
Ecuación en diferencias



Para este tipo de entradas, el modelo discretizado da los mismos valores en los instantes t = kT que el modelo continuo. (Partiendo del mismo estado inicial y aplicando las mismas entradas)

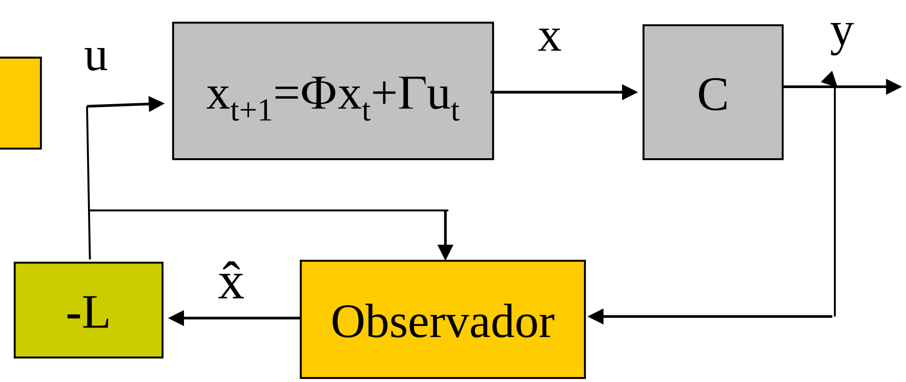
Estimación de estados: Observadores

Muchas veces el estado no es medible y se desea estimar su valor para aplicar una ley de control del tipo u = -Lx.



Caso sin ruido:
Observador de estados:

$$\hat{x}(t\,|\,t)=\hat{x}(t\,|\,t-1)+K\left[y(t)-C\hat{x}(t\,|\,t-1)\right]$$



Fórmula recursiva de estimación (predicción- corrección) con un término de corrección proporcional al error de estimación

K matriz de ganancia del observador

Errores de estimación

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \Phi x(t-1) + \Gamma u(t-1)$$

$$\hat{x}(t \mid t) = \hat{x}(t \mid t-1) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t \mid t-1)\right] =$$
$$= \left[\Phi\hat{x}(t-1 \mid t-1) + \Gamma u(t-1)\right] + K\left[Cx(t) - C\hat{x}(t \mid t-1)\right]$$

restando

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t \mid t) = \Phi e(t-1) - KC\left[x(t) - \hat{x}(t \mid t-1)\right] =$$
$$= \Phi e(t-1) - KC\left[(\Phi x(t-1) + \Gamma u(t-1)) - (\Phi\hat{x}(t-1 \mid t-1) + \Gamma u(t-1))\right] =$$
$$= \Phi e(t-1) - KC\Phi e(t-1) = \left[\Phi - KC\Phi\right]e(t-1)$$

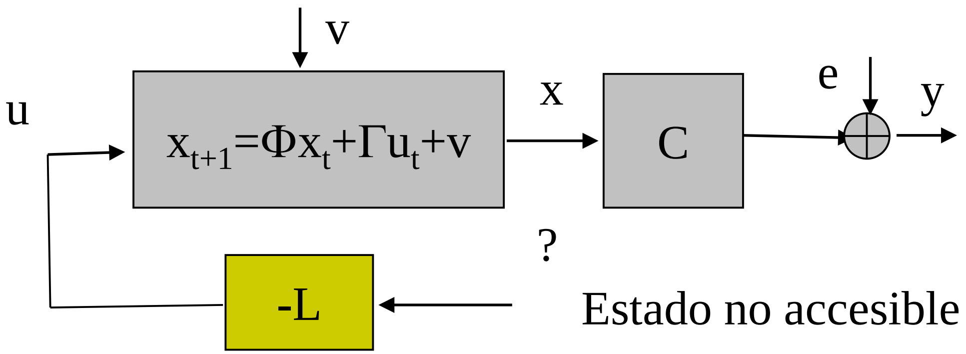
$$\boxed{e(t) = \left[I - KC\right]\Phi e(t-1)}$$

Para que el error de estimación tienda a cero: los autovalores de (I-KC)Φ deben estar dentro del círculo unidad (Criterio de selección de K, se fija la dinámica del error)

Filtro de Kalman

Problema de estimación de estados con perturbaciones gaussianas

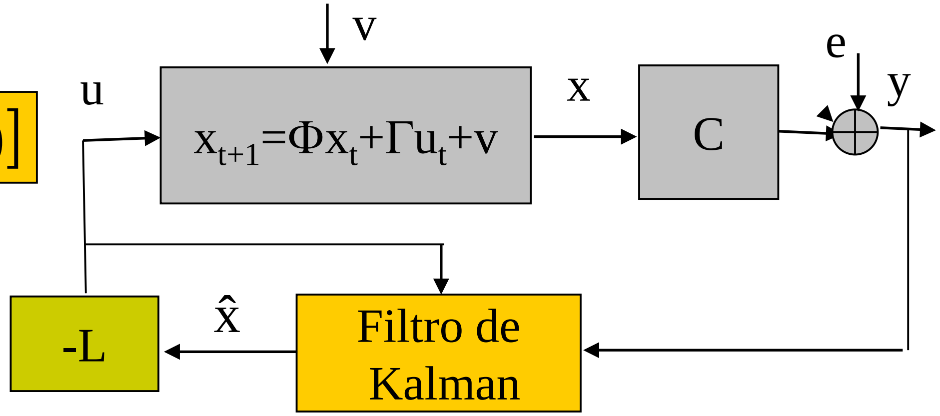
$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + e(t)$$



Estado no accesible

Filtro de Kalman: Elección óptima de la matriz de ganancias del observador para minimizar la varianza del error

$$\hat{x}(t\,|\,t) = \hat{x}(t\,|\,t-1) + K(t)\big[y(t) - C\hat{x}(t\,|\,t-1)\big]$$



$$\hat{x}(t\,|\,t-1) = \Phi\hat{x}(t-1\,|\,t-1) + \Gamma u(t-1)$$

Dos formulaciones:

Filtro y predictor

K(t) matriz de Kalman: ganancia del filtro

Filtro de Kalman (KF)

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + e(t)$$

La ganancia K se escoge para minimizar la varianza del error

$$\hat{x}(t\,|\,t) = \hat{x}(t\,|\,t-1) + K(t)\left[y(t) - C\hat{x}(t\,|\,t-1)\right]$$

$$\hat{x}(t\,|\,t-1) = \Phi\hat{x}(t-1\,|\,t-1) + \Gamma u(t-1)$$

$$K(t) = P(t)C'\left[CP(t)C' + R_{ee}\right]^{-1}$$
$$P(t) = \Phi\left[I - K(t-1)C\right]P(t-1)\Phi' + R_{vv}$$

P es la varianza del error de predicción que se calcula recursivamente

R_{ee} y R_{vv} son respectivamente las covarianzas de las perturbaciones de la salida y del estado que se suponen conocidas

Extended Kalman Filter (EKF)

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) + v(t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t)) + e(t)$$

Si el sistema dinámico es no-lineal, se puede usar el mismo enfoque haciendo una linealización sobre el punto de operación y calculando las predicciones "a priori" con el modelo no lineal, dando lugar al EKF

$$\hat{x}(t|t) = f(\hat{x}(t-1|t-1), u(t-1)) + K(t)\left[y(t) - Cg(\hat{x}(t|t-1), u(t-1))\right]$$

$$K(t) = P(t|t-1)C(t)'\left[C(t)P(t|t-1)C(t)' + R_{ee}\right]^{-1}$$
$$P(t|t-1) = A(t)P(t-1|t-1)A(t)' + R_{vv}$$
$$P(t|t) = (I - K(t)C(t))P(t|t-1)$$
$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{t-1} \qquad C(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{t-1}$$
$$\hat{x}(t|t-1) = f(\hat{x}(t-1t|t-1), u(t-1))$$

P es la varianza del error de predicción que se calcula recursivamente

R_{ee} y R_{vv} son respectivamente las covarianzas de las perturbaciones de la salida y del estado que se suponen conocidas

Estimación conjunta de estados y parámetros con el EKF

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), p) + v(t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), p) + e(t)$$

p parámetros desconocidos del modelo

El EKF se puede utilizar para también para estimar simultaneamente estados y parámetros desconocidos sin mas que considerer el sistema ampliado:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), p) + v(t)$$
$$p(t+1) = p(t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), p) + e(t)$$

$$z(t+1) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ p(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix} = F(z(t), u(t)) + \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z}(t \mid t) = F(\hat{z}(t-1 \mid t-1), u(t-1)) + K(t)\left[y(t) - Cg(\hat{z}(t \mid t-1), u(t-1))\right]$$

$$\hat{z}(t \mid t-1) = \begin{bmatrix} f(\hat{x}(t-1 \mid t-1), u(t-1)) \\ \hat{p}(t-1) \end{bmatrix}$$

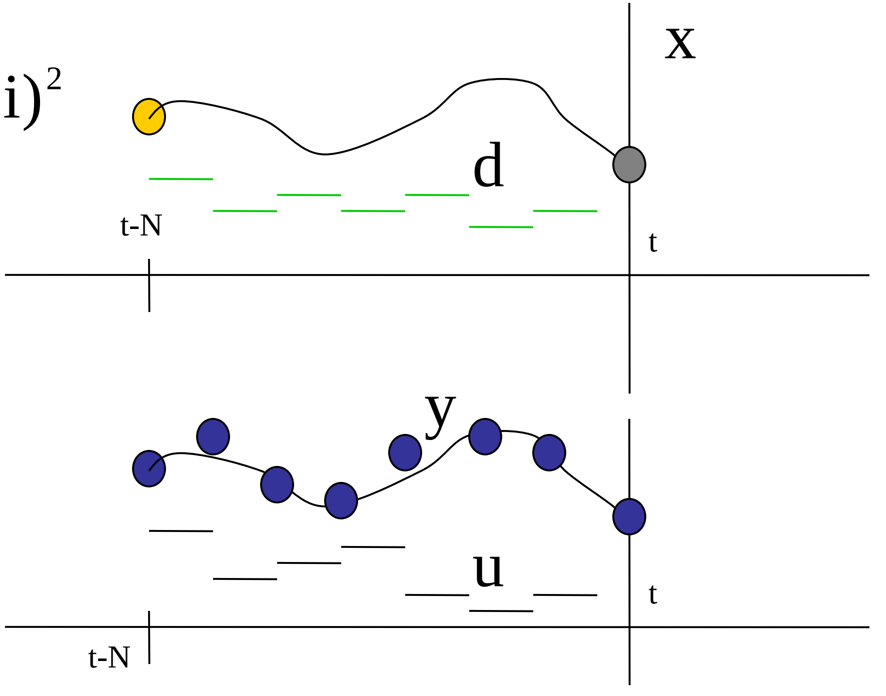
Moving Horizon Estimation (MHE)

$$\min_{x_{t-N},d_i} \sum_{i=0}^{N} \left[y(t-i) - y_m(t-i)\right]^2 + \gamma d(t-i)^2$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$L_v \le d(t-i) \le L_V$$



Facilmente inicializable
Tiene la misma estructura que el problema de optimización del control

Qué estado inicial en t-N and y perturbaciones mínimas d(t-i) llevarían al proceso a evolucionar de la forma más cercana a los valores medidos y(t-i) en el intervalo [t-N, t] si se aplicaran las acciones de control u(t-i) realmente aplicadas en dicho intervalo?

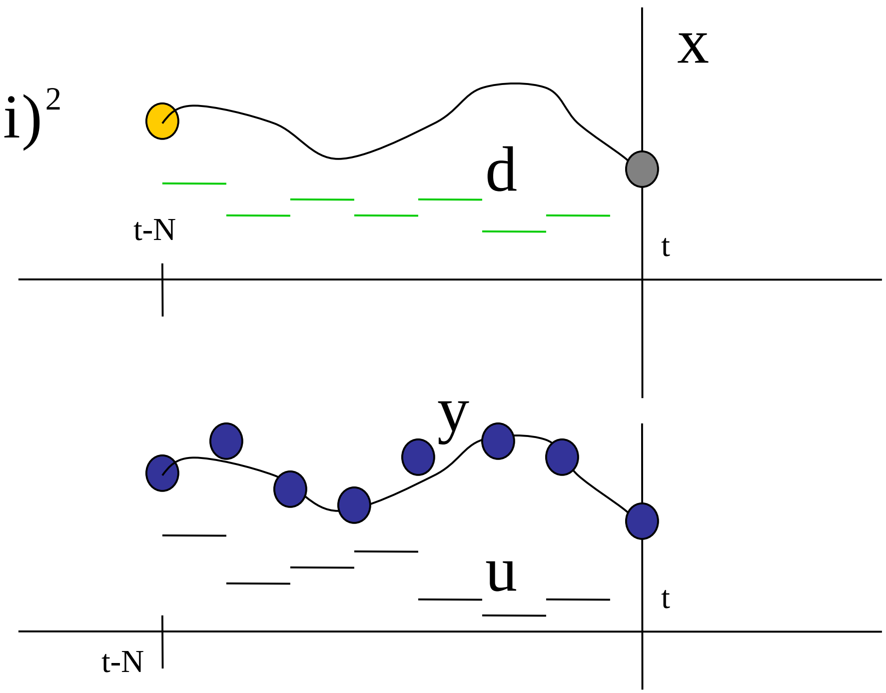
Moving Horizon Estimation (MHE)

$$\min_{x_{t-N},d_i} \sum_{i=0}^{N} \left[y(t-i) - y_m(t-i) \right]^2 + \gamma d(t-i)^2$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$L_v \leq d(t-i) \leq L_V$$



Una vez que se han calculado los x(t-N) y d(t-N), d(t -N+1), … óptimos, x(t) se puede estimar por simulación del modelo comenzando en x(t-N) y aplicando los controles u(t-N), u(t-N+1),….y perturbaciones d(t-N), d(t-N+1),… hasta el tiempo t

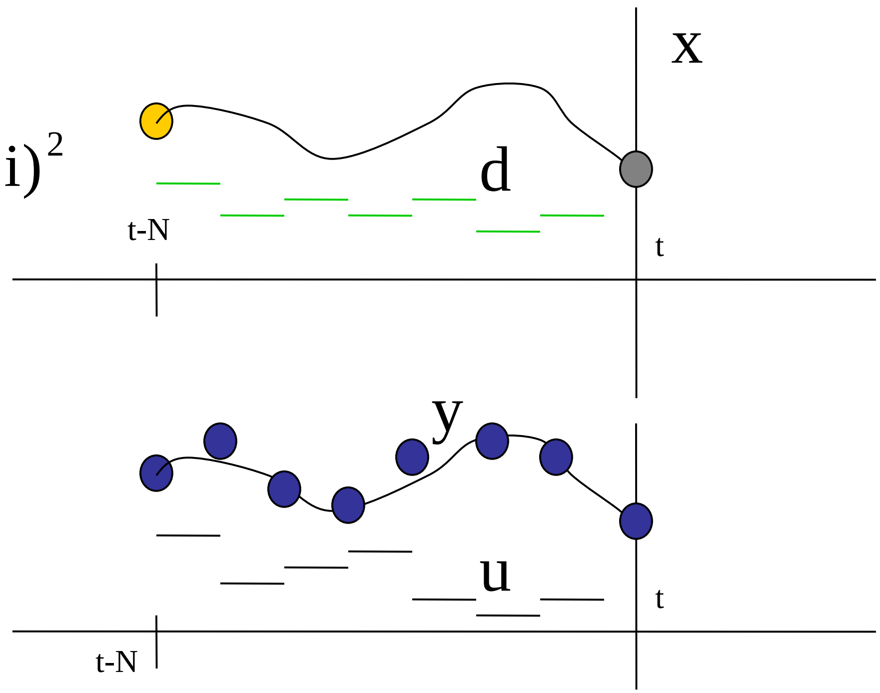
Moving Horizon Estimation (MHE)
Formulación discreta

$$\min_{x_{t-N},d_i} \sum_{i=0}^{N} \left[y(t-i) - y_m(t-i)\right]^2 + \gamma d(t-i)^2$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), d(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$L_v \le d(t-i) \le L_V$$



Qué estado inicial en t-N and y perturbaciones mínimas d(t-i) llevarían al proceso a evolucionar de la forma más cercana a los valores medidos y(t-i) en el intervalo [t-N, t] si se aplicaran las acciones de control u(t-i) realmente aplicadas en dicho intervalo?

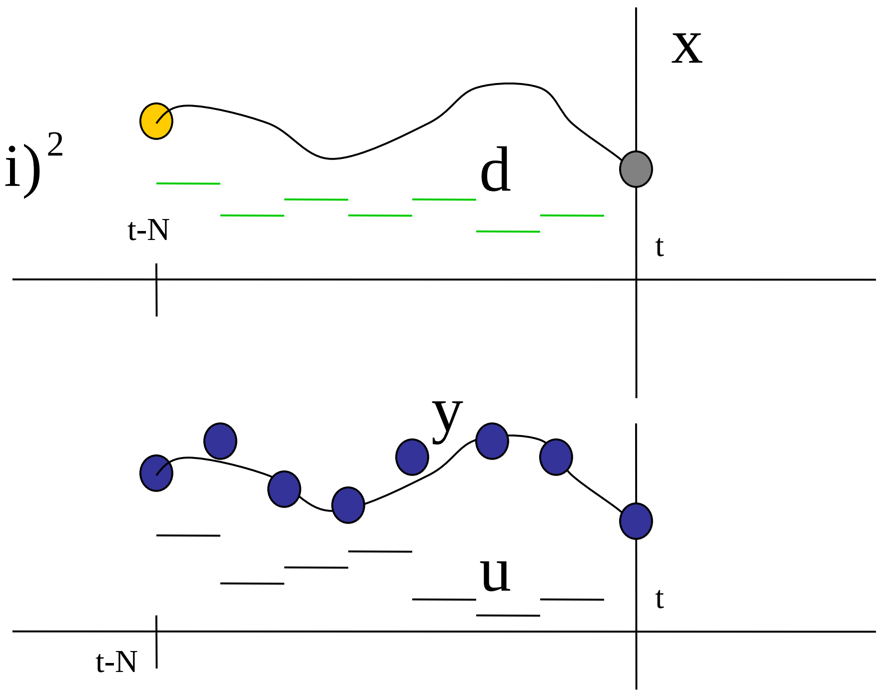
Moving Horizon Estimation (MHE)

$$\min_{x_{t-N}, d_i} \sum_{i=0}^{N} [y(t-i) - y_m(t-i)]^2 + \gamma d(t-i)^2$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), d(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$L_v \leq d(t-i) \leq L_V$$



Una vez que se han calculado los x(t-N) y d(t-N), d(t -N+1), … óptimos, x(t) se puede estimar por simulación del modelo comenzando en x(t-N) y aplicando los controles u(t-N), u(t-N+1),….y perturbaciones d(t-N), d(t-N+1),… hasta el tiempo t